

## **5. OSCILACIONES NO AXILSIMETRICAS**

### 5.1. INTRODUCCION

El objeto de este Capitulo es el de completar el análisis de uno de los aspectos mecánicos más significativos de un sistema físico cual es la determinación de sus frecuencias y modos propios, en este caso, los de una columna líquida.

Los conocimientos actuales sobre este tema se remontan a Rayleigh (1945) que estudió el caso de una columna infinita aislada no viscosa, dentro del marco de la dinámica de los chorros capilares. Posteriormente se añadieron el efecto de la viscosidad y la presencia de un medio circundante (Tomotika, 1935) y la influencia de la posición del límite de dicho medio (Bauer, 1982).

La condición de anclaje de la entrefase al borde de los discos ha sido considerada por primera vez por Meseguer (1983), quien señala la significativa influencia cuantitativa de esta condición. La condición de anclaje es un requisito no trivial, por ser ésta la situación más usual en las aplicaciones prácticas de la técnica de la zona flotante. No obstante el notable avance introducido hay que señalar la limitación de la validez de los resultados obtenidos al caso de puentes líquidos de esbeltez grande, debido al uso de un modelo unidimensional. Los estudios mencionados anteriormente (salvo el último) emplean modelos linealizados aplicables sólo cuando las deformaciones del puente líquido respecto a la forma cilíndrica son pequeñas.

El caso de oscilaciones de amplitud finita, cerca del límite de estabilidad ha sido estudiado numéricamente por Meseguer (1983) y asintóticamente por Rivas y Meseguer (1984), ambos haciendo uso de modelos unidimensionales.

Los modelos unidimensionales, aunque de reconocida fecundidad, no son aplicables a los movimientos no axilsimétricos, que requieren modelos menos restrictivos (tridimensionales). Sin embargo, la condición de anclaje introduce en los modelos tridimensionales una dificultad adicional no existente en los unidimensionales. Esta dificultad estriba en el requisito simultáneo de que la velocidad axial y la deformación de la entrefase sean ambas nulas en los discos, condición que los modelos derivados directamente de la teoría de chorros capilares no cumplen (Meseguer, 1983). La forma de resolver este problema consiste en combinar adecuadamente los modos simples que aparecen en la solución del modelo de columnas infinitas. Este método ha sido empleado por Sanz (1985) para el estudio de las oscilaciones axilsimétricas, cuyos resultados, comprobados experimentalmente, han servido para determinar los límites de validez del modelo unidimensional.

Dentro de este marco, para completar el estudio de las frecuencias y modos propios de oscilación quedan por analizar los movimientos no axilsimétricos de puentes líquidos anclados cuyo estudio, empleando un modelo tridimensional linealizado, será el objeto de este capítulo. Como es obvio, la gran riqueza de modos que aparecen, en comparación con el modo axilsimétrico,

viene acompañada de una mayor complejidad en la formulación del problema.

En el resumen de trabajos realizados no se han reflejado otros, como por ejemplo los relacionados con el efecto de la rotación sólida o la influencia de la velocidad relativa entre ambos medios, por ser complicaciones adicionales que no parece adecuado incluir en un primer análisis.

Volviendo al tema en estudio, la principal aplicación de sus resultados se refiere al movimiento en condiciones de microgravedad, en la que el puente líquido está en el vacío o rodeado por un gas de mucha menor densidad. No obstante, en el modelo se incluirá la influencia de la presencia de un fluido exterior de densidad comparable con la del líquido interior para obtener simultáneamente resultados que puedan comprobarse experimentalmente en microgravedad simulada en tierra con ayuda de la técnica de flotabilidad neutra. Esta técnica se ha mostrado muy fértil en su aplicación, entre otras configuraciones, al estudio del puente líquido, pudiendo destacarse los trabajos experimentales efectuados en los siguientes campos: la determinación de los límites de estabilidad estática (Sanz & Martínez, 1983); la comprobación de los resultados obtenidos por el modelo unidimensional en los casos de la dinámica de rotura (Mesequer & Sanz, 1985) y de la influencia combinada de la diferencia de diámetro de los discos y una pequeña gravedad axial (Mesequer et al., 1985); y la investigación de las frecuencias y modos propios en las

oscilaciones axilsimétricas (Sanz, 1985).

Finalmente, en la realización de este estudio teórico, además de las hipótesis que permiten linealizar el problema, se considerará que el efecto de la viscosidad en los modos y frecuencias de oscilación es despreciable, lo que es válido para la clase de experimentos y aplicaciones más relevantes. Una estimación de este efecto puede encontrarse en Sanz (1985) y Sanz & Mesequer (1985).

Oscilaciones no axilsimétricas son fácilmente observables durante los ensayos en tierra en microgravedad simulada en Tanque de Plateau, como consecuencia de algún movimiento lateral fortuito del tanque, y serán el objeto de un próximo trabajo experimental.

## **2. ECUACIONES GENERALES**

En forma similar al planteamiento del problema para el caso de las oscilaciones axilsimétricas, considérese un puente líquido mantenido por fuerzas de tensión superficial entre dos discos del mismo diámetro coaxiales y paralelos, como se muestra en la Fig. 1. El puente líquido está rodeado por otro fluido, inmiscible con el anterior y contenido a su vez en un recipiente cilíndrico coaxial con el eje de los discos y cerrado por tapas paralelas prolongación de los discos.

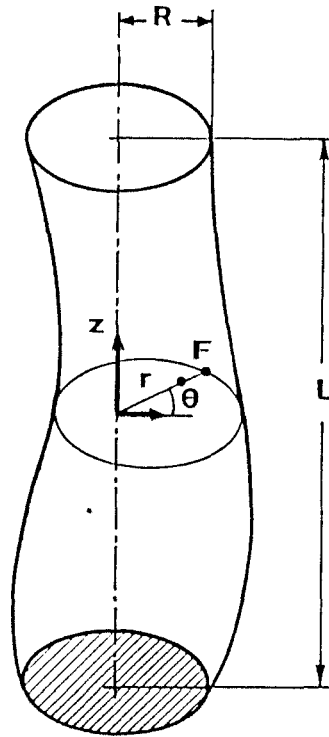


Fig.1. Geometría y nomenclatura para el caso no axilsimétrico.

Se trata de estudiar el comportamiento del puente líquido sometido a perturbaciones que en principio supondremos aplicadas en la interfase. Se harán las siguientes hipótesis (Meseguer, 1983):

- a) Los movimientos en la zona y el baño son generados únicamente por los gradientes de presión capilar debidos a la deformación de la interfase y en su caso a las acciones aplicadas en ella.
- b) No existen fuerzas de inercia debidas al movimiento del sistema de referencia.
- c) Las propiedades físicas de ambos líquidos se considerarán constantes y uniformes.

El despreciar el efecto de la viscosidad permite utilizar la hipótesis de que el movimiento es potencial y, por lo tanto, el campo de velocidades deriva de un potencial  $\phi^j(r, z, \theta; t)$  tanto en el interior del puente líquido ( $j = i$ ) como en el baño ( $j = o$ ). Ambos cumplen la ecuación de Laplace:

$$\Delta \phi^j = 0 \quad (1)$$

Las componentes de la velocidad en coordenadas cilíndricas,  $U^j$ ,  $W^j$  y  $V^j$  asociadas a las coordenadas  $r$ ,  $z$ ,  $\theta$ , respectivamente, se corresponden con las del gradiente de  $\phi^j$ . A lo largo del estudio consideraremos que todas las cantidades están adimensionalizadas tomando como magnitudes características el radio de los discos  $R$  y la velocidad  $(\sigma/\rho^i R)^{1/2}$ , donde  $\sigma$  es la tensión interfacial y  $\rho^i$  la densidad del líquido de la zona. Las condiciones de contorno en las superficies sólidas son:

$$W^i(r, \pm \Lambda, \theta, t) = W^o(r, \pm \Lambda, \theta, t) = 0 \quad (2)$$

$$U^o(B, z, \theta, t) = 0 \quad (3)$$

donde  $\Lambda = L/(2R)$  es la esbeltez, y  $L$  la longitud del puente líquido. En la entrefase,  $r = F(z, \theta, t)$  deben cumplirse las condiciones de compatibilidad de deformaciones

$$F_t - U^j + W^j F_z + V^j F_\theta = 0 \quad (4)$$

y el balance normal entre la presión capilar y el salto de presiones

$$P^i - P^o + \frac{F(1+F_z^2)(F_{\theta\theta} - F) + F F_{zz}(F^2 + F_\theta^2) - 2F_\theta(F_\theta + F F_z F_{z\theta})}{[F^2(1+F_z^2) + F_\theta^2]^{-3/2}} = G \quad (5)$$

donde  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(z, \theta, t)$  es un término forzador que corresponde a otras acciones aplicadas en la interfase distintas de la presión capilar y el movimiento propio. La interfase debe cumplir además las condiciones de anclaje, periodicidad y conservación del volumen (el del cilindro en este caso)

$$F(\pm\Lambda, \theta, t) = 1 \quad (6)$$

$$F(z, \theta, t) \equiv F(z, \theta + 2\pi, t) \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \left[ \int_0^{2\pi} F^2 d\theta \right] dz = 2\pi\Lambda \quad (8)$$

A las anteriores se deben añadir las condiciones iniciales adecuadas, que se comentarán más adelante.

### 3. ANALISIS LINEAL

Sea  $\epsilon$  un parámetro pequeño que mide, por ejemplo, la desviación inicial de la interfase respecto a la forma cilíndrica. Las variables del problema pueden expresarse como

$$\begin{bmatrix} \phi^j \\ p_{-1}^i \\ p^0 \\ F-1 \end{bmatrix} = \epsilon \begin{bmatrix} \psi^j \\ p^i \\ p^0 \\ f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \epsilon \begin{bmatrix} G \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (9)$$

Despreciando términos de orden superior se obtiene la siguiente formulación. En primer lugar, la ecuación para el potencial no



cambia

$$\Delta\psi^j = 0 \quad (10)$$

al igual que las condiciones de contorno (2) y (3), por ser homogéneas

$$\psi_z^i(r, \pm\Lambda, \theta, t) = \psi_z^o(r, \pm\Lambda, \theta, t) = 0 \quad (11)$$

$$\psi_r^o(B, z, \theta, t) = 0 \quad (12)$$

Las condiciones de contorno en la entrefase, (4) y (5), se linealizan en el entorno de  $r = 1$  proporcionando en el primer orden

$$f_t = \psi_r^i = \psi_r^o \quad (13)$$

$$f_{zz} + f + f_{\theta\theta} = \psi_t^i - \rho\psi_t^o + G \quad (14)$$

donde  $\rho = \rho^o/\rho^i$ . En cuanto a las condiciones para la forma de la entrefase (6), (7) y (8), quedan

$$f(\pm\Lambda, \theta, t) = 0 \quad (15)$$

$$f(z, \theta, t) \equiv f(z, \theta+2\pi, t) \quad (16)$$

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \int_0^{2\pi} f dz d\theta = 0 \quad (17)$$

El método para resolver el problema es análogo al seguido en el estudio de las oscilaciones axilsimétricas, con la salvedad de que en los modos no axilsimétricos, además de la complejidad de la existencia de un parámetro adicional (la constante  $m$  de separabilidad del problema azimutal) aparecen conjuntamente términos del potencial de velocidades que representan movimientos bidimensionales ( $n = 0$  ó  $m = 0$ ) y soluciones singulares de (13) cuando  $m = 1$ , lo que requerirá el tratamiento explícito de este modo. Aunque inicialmente se retengan los modos axilsimétricos ( $m = 0$ ), se omitirán en los cálculos de las frecuencias de oscilación para simplificar la presentación y por estar ya resueltos (Sanz, 1985), aunque sus resultados sí se presentarán por razones de unidad temática.

Brevemente, el método consiste en: 1º) escribir la solución de (10) que cumpla las condiciones en las superficies sólidas, en donde aparecerán coeficientes indeterminados a falta del cumplimiento de las condiciones en la interfase; 2º) integrar (14), en cuya solución aparecerán dos constantes arbitrarias por cada modo azimutal,  $m$ ; 3º) calcular los coeficientes indeterminados del paso (1º) y las constantes del paso (2º) haciendo uso de la primera igualdad de (13) y las condiciones (15). En una primera etapa del estudio la excitación  $G(z, \theta, t)$  se considerará nula para analizar el problema homogéneo, lo que permitirá calcular las frecuencias y los modos propios del sistema.

Siguiendo este esquema, las soluciones de (10) que cumplen (11) y (12) y la de periodicidad (16), son:

$$\psi^1 = a_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{m0} r^m \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} I_m(l_n r) \cos l_n(z+\Lambda) \cos m\theta \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \psi^0 = b_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} b_{m0} r^m \left[1 + \left(\frac{B}{r}\right)^{2m}\right] \cos m\theta + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \left[ K_m(l_n r) - I_m(l_n r) \frac{K'_m(l_n B)}{I'_m(l_n B)} \right] \cos l_n(z+\Lambda) \cos m\theta \end{aligned} \quad (19)$$

donde  $l_n = n\pi/(2\Lambda)$ ;  $a_{mn}$  y  $b_{mn}$  son constantes a determinar;  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  son las funciones de Bessel modificadas de orden  $m$ , de primera y segunda especie, respectivamente, y las primas indican las derivadas respecto del argumento. El caso  $n = 0$ , que representa un movimiento bidimensional en el plano  $r-\theta$ , se trata aparte porque la forma peculiar de la solución de (10) correspondiente así lo requiere. Aunque el segundo sumatorio es doble, en lo que sigue sólo se escribirán, además de  $m = 1$ , los términos debidos a un modo genérico  $m$  ya que los modos azimutales aparecen desacoplados.

Una vez satisfechos (11) y (12), de los dos de (13) se obtiene

$$f_t = \{ m a_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} l_n I'_m(l_n) \cos l_n(z+\Lambda) \} \cos m\theta \quad (20)$$

$$\frac{a_{m0}}{b_{m0}} = 1 - B^{2m} \quad (21)$$

$$\frac{a_{mn}}{b_{mn}} = \frac{K'_m(l_n)}{I'_m(l_n)} - \frac{K'_m(l_n B)}{I'_m(l_n B)} \quad (22)$$

Las condiciones (21) y (22) permiten eliminar los coeficientes  $b_{mn}$  de la formulación. La condición (20) se utilizará más adelante. Siguiendo lo reseñado en las cuestiones de método, se pasa a integrar (14). Para ello se transforma su segundo miembro haciendo uso de (18), (19), (21) y (22), obteniendo

$$f_{zz} + f + f_{\theta\theta} = \dot{a}_{oo} - \rho \dot{b}_{oo} + G_{oo} + \{\dot{a}_{mo} S_{mo} + G_{mo} + \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{a}_{mn} I_m(l_n) S_{mn} + G_{mn}] \cos l_n(z+\Lambda)\} \cos m\theta \quad (23)$$

donde

$$S_{mo} = 1 + \rho \frac{B^{2m} + 1}{B^{2m} - 1} \quad (24)$$

$$S_{mn} = 1 + \rho \left[ \frac{K_m(l_n)}{I_m(l_n)} - \frac{K'_m(l_n B)}{I'_m(l_n B)} \right] \left[ -\frac{K'_m(l_n)}{I'_m(l_n)} + \frac{K'_m(l_n B)}{I'_m(l_n B)} \right]^{-1}$$

y  $G_{mn}$  son los coeficientes del desarrollo de  $G(z, \theta, t)$  en serie doble de cosenos de  $m\theta$  y  $l_n(z+\Lambda)$ . El punto sobre los coeficientes representa su derivada respecto del tiempo. Las soluciones homogénea,  $f_h$ , y particular,  $f_p$ , de (23) que cumplen las condiciones de periodicidad (17) son las siguientes

$$f_h = a^o \cos z + b^o \sin z + (a^1 + b^1 z) \cos \theta + [a^m \text{Ch}(a_m z) + b^m \text{Sh}(a_m z)] \cos m\theta \quad (25)$$

$m > 1$

donde  $a_m = \sqrt{m^2 - 1}$ , y

$$f_p = \dot{a}_{oo} - \rho \dot{b}_{oo} + G_{oo} + (\dot{a}_{10} S_{10} + G_{10}) \frac{z^2}{2} \cos \theta + \frac{\dot{a}_{mo} S_{mo} + G_{mo}}{k_{mo}} \cos m\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{a}_{mn} I_m S_{mn} + G_{mn}}{k_{mn}} \cos l_n(z+\Lambda) \cos m\theta \quad (26)$$

$m \geq 0$

donde  $k_{mn} = 1 - m^2 - l_n^2$ . En (25) los superíndices indican el

modo  $m$  al que pertenecen las constantes (en realidad funciones sólo del tiempo) resultantes de la integración. Por simplicidad se ha omitido el argumento de  $I_m(l_n)$ .

El caso  $m = 0$ , correspondiente a los modos axilsimétricos, ya está resuelto por lo que no se retendrá en lo siguiente. Con ello desaparecen de la formulación las constantes aditivas y la condición de conservación del volumen, si ésta no fuera homogénea, ya que para  $m > 0$  se cumple idénticamente.

Los casos  $m = 1$  y  $n = 0$  han de ser considerados explícitamente por así exigirlo la forma de la solución particular. Por otra parte, tampoco pueden ser englobados en el caso general, ya que  $k_{10} = 0$  hace singular los términos correspondientes.

Combinando (25) y (26) y considerando los modos  $m > 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
 f = & \{a^1 + b^1 z + (\dot{a}_{10} S_{10} + G_{10}) \frac{z^2}{2}\} \cos \theta + \\
 & + \{a^m \text{Ch}(a_m z) + b^m \text{Sh}(a_m z) + \frac{\dot{a}_{m0} S_{m0} + G_{m0}}{k_{m0}}\} \cos m \theta + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{a}_{mn} I_m S_{mn} + G_{mn}}{k_{mn}} \cos l_n(z+\Lambda) \cos m \theta \quad (27) \\
 & \quad \quad \quad m \geq 1
 \end{aligned}$$

Como se había indicado al principio, en el tercer paso se procede a identificar (20) con la derivada de (27) y a imponer las condiciones (15). Para la identificación se necesitan los desarrollos de  $z$ ,  $z^2$ ,  $\text{Ch}(a_m z)$  y  $\text{Sh}(a_m z)$  en serie de  $\cos l_n(z+\Lambda)$

$$\begin{aligned}
z &= \sum_{p=1}^{\infty} D_{12p-1} \cos l_{2p-1}(z+\Lambda) & D_{ij} &= \frac{2}{\Lambda k_{ij}} \\
\frac{z^2}{2} &= D_{10} - \Lambda \sum_{p=1}^{\infty} D_{12p} \cos l_{2p}(z+\Lambda) & D_{10} &= \frac{\Lambda^2}{6} \\
\text{Ch}(a_m z) &= C_{m0} + \sum_{p=1}^{\infty} C_{m2p} \cos l_{2p}(z+\Lambda) & C_{m0} &= \frac{\text{Sh}(a_m \Lambda)}{a_m \Lambda} \\
\text{Sh}(a_m z) &= \sum_{p=1}^{\infty} C_{m2p-1} \cos l_{2p-1}(z+\Lambda) & C_{m2p} &= -a_m \text{Sh}(a_m \Lambda) D_{m2p} \\
& & C_{m2p-1} &= a_m \text{Ch}(a_m \Lambda) D_{m2p-1}
\end{aligned} \tag{28}$$

Sustituyendo en (27) y derivando respecto de  $t$  se obtiene

$$\begin{aligned}
f_t &= \{ \dot{a}^1 + \dot{b}^1 \sum_{p=1}^{\infty} D_{12p-1} \cos l_{2p-1}(z+\Lambda) + (\ddot{a}_{10} S_{10} + \dot{G}_{10}) [D_{10} - \\
&\quad - \Lambda \sum_{p=1}^{\infty} D_{12p} \cos l_{2p}(z+\Lambda)] \} \cos \theta + \{ \dot{a}^m [C_{m0} + \sum_{p=1}^{\infty} C_{m2p} \cos l_{2p}(z+\Lambda)] + \\
&\quad + \dot{b}^m \sum_{p=1}^{\infty} C_{m2p-1} \cos l_{2p-1}(z+\Lambda) + \frac{\ddot{a}_{m0} S_{m0} + \dot{G}_{m0}}{k_{m0}} \} \cos m \theta + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{a}_{mn} I_m S_{mn} + \dot{G}_{mn}}{k_{mn}} \cos l_n(z+\Lambda) \cos m \theta \tag{29}
\end{aligned}$$

$m > 1$

$m \geq 1$

La identificacion de (20) y (29) proporciona las expresiones

$$\begin{aligned}
n &= 0 & \dot{a}_1 + (\ddot{a}_{10} S_{10} + \dot{G}_{10}) D_{10} &= a_{10} \\
m &= 1 & n = 2p & -\Lambda (\ddot{a}_{10} S_{10} + \dot{G}_{10}) D_{1n} = \mathcal{L}(a_{mn}) \\
& & n = 2p-1 & \dot{b}^1 D_{1n} = \mathcal{L}(a_{mn}) \\
n &= 0 & \dot{a}^m C_{m0} + \frac{\ddot{a}_{m0} S_{m0} + \dot{G}_{m0}}{k_{m0}} &= m a_{m0} \\
m &\geq 2 & n = 2p & \dot{a}^m C_{mn} = \mathcal{L}(a_{mn}) \\
& & n = 2p-1 & \dot{b}^m C_{mn} = \mathcal{L}(a_{mn})
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\mathcal{L}(a_{mn}) \equiv l_n I'_m a_{mn} - \frac{I_m S_{mn} \ddot{a}_{mn}}{k_{mn}}$$

$\mathcal{L}(a_{mn}) = 0$  es el problema que aparece en el caso de las columnas infinitas (Bauer 1982). En cuanto a las condiciones (15) son equivalentes a igualar a cero las partes simétrica y antisimétrica respecto a  $z = 0$  para  $z = \Lambda$ , lo que permite escribir, separando en modos azimutales

$$\begin{aligned}
 & \begin{aligned}
 & n = 2p \quad a^1 + \frac{1}{2} (\dot{a}_{10} S_{10} + G_{10}) \Lambda^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\dot{a}_{mn} I_m S_{mn} + G_{mn}}{k_{mn}} = 0 \\
 & m = 1 \\
 & n = 2p-1 \quad b^1 \Lambda - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{a}_{mn} I_m S_{mn} + G_{mn}}{k_{mn}} = 0
 \end{aligned} \\
 & \begin{aligned}
 & n = 2p \quad a^m \text{Ch}(a_m \Lambda) + \frac{\dot{a}_{m0} S_{m0} + G_{m0}}{k_{m0}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\dot{a}_{mn} I_m S_{mn} + G_{mn}}{k_{mn}} = 0 \\
 & m \geq 2 \\
 & n = 2p-1 \quad b^m \text{Sh}(a_m \Lambda) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{a}_{mn} I_m S_{mn} + G_{mn}}{k_{mn}} = 0
 \end{aligned}
 \end{aligned} \tag{31}$$

Al separarse las partes simétrica y antisimétrica en las condiciones de contorno también podrá separarse la solución. Por economía de lenguaje en adelante se omitirá la referencia al plano  $z = 0$  al indicar la simetría. Para  $m > 0$  las ecuaciones (30) y (31) indican que los modos antisimétricos son esencialmente diferentes de los simétricos ya que los primeros son tridimensionales, mientras que los segundos son una combinación de modos planos ( $n = 0$ ) y tridimensionales ( $n = 2p$ ) los cuales se apoyan en los modos planos. La importancia de estos últimos es tal que sin ellos los coeficientes  $a_{mn}$  ( $n = 2p$ ) para  $m = 1$  serían nulos. Para cada modo azimutal  $m$  y para los valores de  $n$  par (o impar) existen  $n+1$  ecuaciones diferenciales (30) y (31) para calcular  $n$  coeficientes  $a_{mn}$  más  $a^m$  (ó  $b^m$ ), como función de la excitación  $G_{mn}$ .

Aun en el caso de que se tratase de un problema no lineal la integración numérica del sistema no ofrecería dificultades de método. Pero antes de pasar al cálculo numérico es posible, y aconsejable, profundizar algo más en la formulación analítica.

#### 4. OSCILACIONES LIBRES

Un método muy potente para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales es el de la transformación de Laplace que los convierte en sistemas algebraicos, tratables por procedimientos sencillos. A pesar de la simplicidad de método la complejidad algebraica de los sistemas involucrados aconseja estudiar inicialmente el problema homogéneo ( $G(z, \theta, t) \equiv 0$ ), es decir el de la respuesta libre, del que se obtienen las frecuencias y los modos propios del sistema, problema básico en cualquier campo de la física y la ingeniería, cuyos resultados son de amplia aplicación.

En lo siguiente se empleará la misma notación para designar a las transformadas de las funciones del tiempo y se llamará  $s$  a la variable independiente en el plano transformado. Se impondrán condiciones iniciales nulas. Al reducirse ahora a un problema algebraico donde  $s$  aparece como un parámetro, de (30) se obtiene

$$\begin{aligned} a_{m0} &= \frac{s a_{m0}^m C_{m0}}{m[1-(s/s_{m0})^2]} & s_{m0}^2 &= \frac{m k_{m0}}{S_{m0}} \\ a_{mn} &= \frac{s a_{mn}^m C_{m0}}{1_n I_m' [1-(s/s_{m0})^2]} & s_{mn}^2 &= \frac{1_n k_{mn} I_m'}{S_{mn} I_m} \end{aligned} \quad (32)$$



Para que la validez de las expresiones (32) pueda extenderse al caso  $m = 1$ , se definen los coeficientes

$$C_{10} = 1, \quad C_{12p} = -\frac{2s^2}{s_{10}^2 - s^2} \frac{k_{10}}{k_{12p}}, \quad k_{10} = \frac{6}{\Lambda^2}, \quad C_{12p-1} = D_{12p-1} \quad (33)$$

En las expresiones anteriores, el coeficiente  $s_{mn}$ , solución del transformado del operador  $\mathcal{L}(a_{mn}) = 0$ , corresponde, en el caso de oscilación o rotura a los valores proporcionados por el modelo de columnas infinitas de Bauer, siendo  $n = N$ , el número de semiondas de la deformada contenidas en la longitud de un radio, medida en la dirección axial. En el caso de una columna finita, los valores posibles de  $s$  son distintos de los  $s_{mn}$  porque un único modo en  $\cos l_n(z+\Lambda)$  no cumple las condiciones de anclaje.

Las condiciones de contorno (31) quedarán

$$\begin{aligned} m = 1 \quad n = 2p \quad a^m + \frac{1}{2} s s_{m0} a_{m0} \Lambda^2 + s \sum_{n=2}^{\infty} a_{mn} I_m S_{mn} / k_{mn} &= 0 \\ n = 2p-1 \quad b^m \Lambda - s \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} I_m S_{mn} / k_{mn} &= 0 \\ m \geq 2 \quad n = 2p \quad a^m \text{Ch}(a_m \Lambda) + s s_{m0} a_{m0} / k_{m0} + s \sum_{n=2}^{\infty} a_{mn} I_m S_{mn} / k_{mn} &= 0 \\ n = 2p-1 \quad b^m \text{Sh}(a_m \Lambda) - s \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} I_m S_{mn} / k_{mn} &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Al sustituir los valores de  $a_{mn}$  dados por (32) en (34) se obtienen las condiciones para que la solución sea distinta de la trivial. Agrupados en formas simétricas ( $n=2p$ ) o antisimétricas ( $n=2p-1$ ), resultan ser

$$\begin{aligned}
 m = 1 \quad s_{m0}^{-1} + \frac{1}{3} s^2 \Lambda^2 - 2s^4 \alpha_m &= 0 \\
 n = 2p \\
 m \geq 2 \quad \frac{\Lambda}{a_m \operatorname{th}(a_m \Lambda)} + \frac{s^2}{a_m^2 (s_{m0}^2 - s^2)} - 2s^2 \alpha_m &= 0 \\
 m = 1 \quad \Lambda^2 - 2s^2 \alpha_m &= 0 \\
 n = 2p-1 \\
 m \geq 2 \quad \frac{\Lambda}{a_m} \operatorname{th}(a_m \Lambda) - 2s^2 \alpha_m &= 0
 \end{aligned} \tag{35}$$

donde

$$\alpha_m = \sum_n \frac{1}{k_{mn} (s_{mn}^2 - s^2)} \tag{36}$$

Estas ecuaciones definen para cada valor de  $\Lambda$  los valores de  $s$  permitidos en un modo determinado de oscilación. Para cada modo azimutal  $m$  y axial (simétrico o antisimétrico) dichos valores son infinitos.

## 5. RESULTADOS

En el caso axilsimétrico se ha demostrado (Sanz, 1985) que los únicos valores posibles de  $s$ , que en general pertenece al conjunto de los números complejos, son aquellos para los que  $s^2$  es un número real, lo que representa movimientos divergentes si  $s$  es real,  $s = \pm \gamma$ , u oscilaciones cuando  $s$  es imaginario puro,  $s = \pm i\omega$ , donde  $\gamma$  y  $\omega$ , el factor de amplificación y la pulsación, respectivamente, son números reales. En el caso no axilsimétrico ocurre lo mismo, como se puede demostrar de forma análoga (Sanz, 1985) por lo que no se volverá a repetir. Este hecho simplifica

la búsqueda de las raíces de las ecuaciones (35) y (36) a los valores reales de  $s^2$ .

Para cada modo azimutal y cada valor de  $\Lambda$  conviene ordenar las raíces  $s_N$  en orden decreciente ( $s^2 < 0$  oscilaciones,  $s^2 > 0$ , rotura), llamando  $s_N^2 = q_N^m(\Lambda)$  ( $N$  indica el número de orden de la raíz para  $\Lambda$  fijo y también el número de semiondas de la deformación asociada al modo axial  $N$ ), en la forma siguiente

$$q_1^m > q_2^m > \dots > q_N^m > \dots \quad (37)$$

Los valores pares (impares) de  $N$  indican formas antisimétricas (simétricas) de la deformada. La relación de orden empieza en  $N = 1$  salvo para el caso  $m = 0$  que por razones de conservación de volumen comienza en  $N = 2$ . Los resultados obtenidos para los primeros valores de  $m$  y  $N$  se muestran en la Fig. 2, donde se ha incluido el caso  $m = 0$  para comparación. Como se observa en la ordenación (37) y en la Fig. 2, los valores de  $q_N^m$  así como las formas simétricas y antisimétricas, para  $m$  fijo, están intercaladas y separadas entre sí por los valores de  $q_N^m = s_{mN}^2$  derivados del modelo de columnas infinitas (Bauer, 1982), lo que permite usar estos valores como puntos iniciales en el método iterativo (Newton-Raphson) empleado para el cálculo de las raíces de las ecuaciones de (35).

Las formas no axilsimétricas no presentan cambio de estabilidad ya que para  $s = 0$  no hay valores de  $\Lambda$  (salvo  $\Lambda = 0$ ) que sean

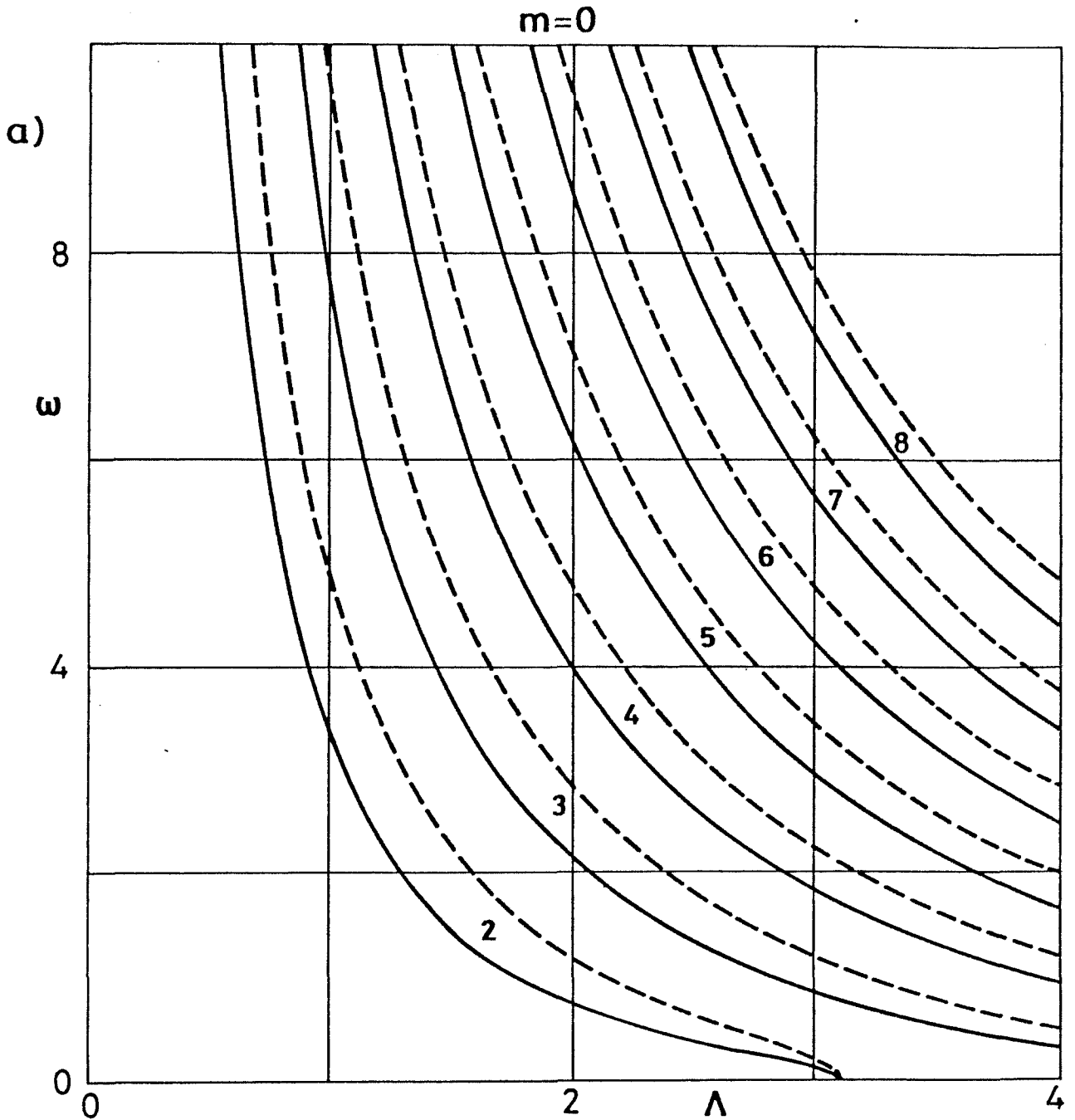


Fig. 2. Variación con la esbeltez,  $\Lambda$ , de la pulsación,  $\omega$ , del movimiento de oscilación de un puente líquido aislado (a,b,d,e) y rodeado de un baño isodenso e infinito (c), para diversos modos azimutales,  $m$ , y axiales,  $N$ . Los números de las curvas corresponden al valor de  $N$  que indica a la vez el orden de la raíz de la ecuación (35) para  $\Lambda$  constante y el número de semiondas de la deformación axial de la entrefase. Línea continua (a trazos), modelo de columna finita (infinita) (Bauer, 1982).

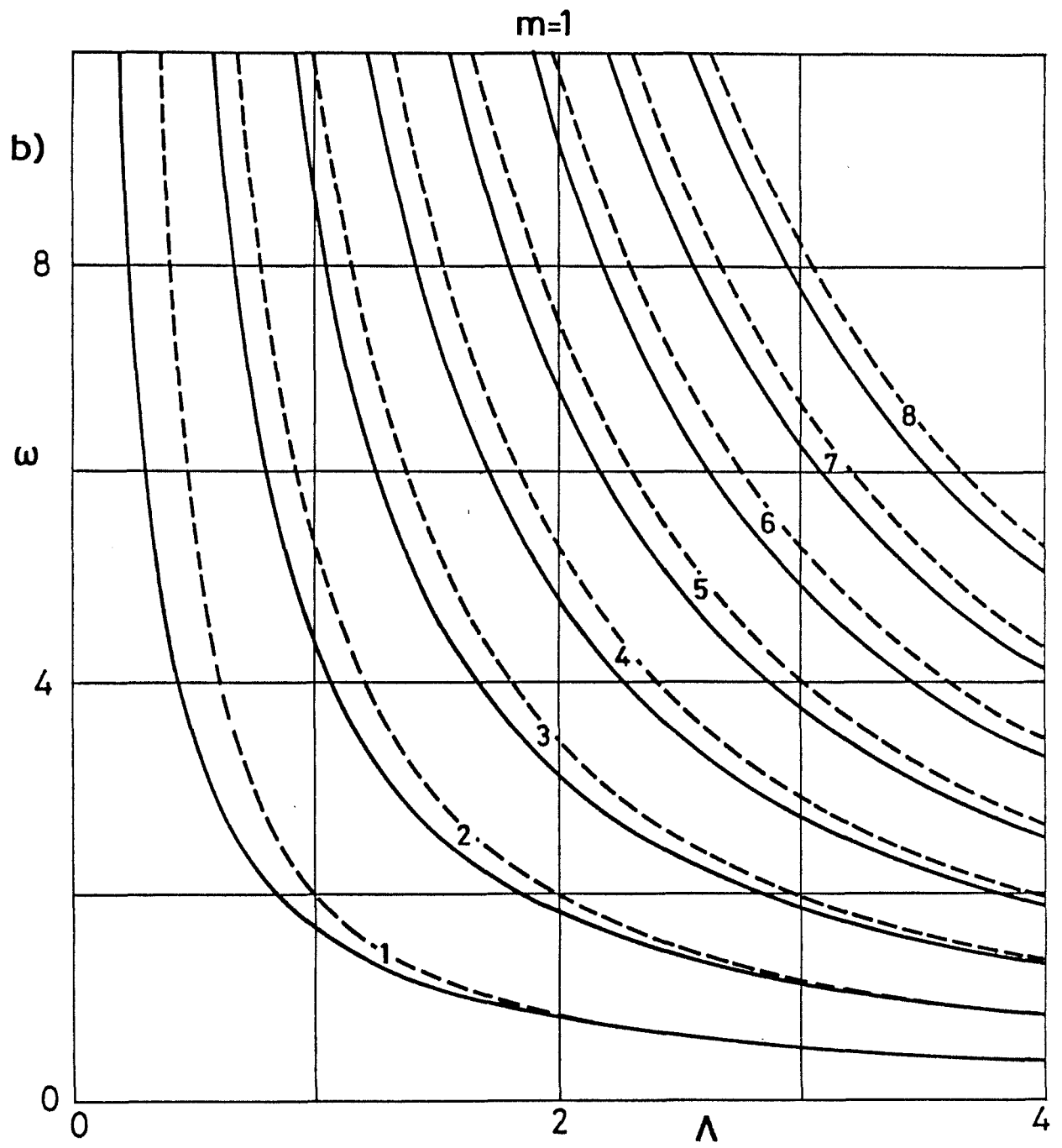


Fig. 2. (Continuación).

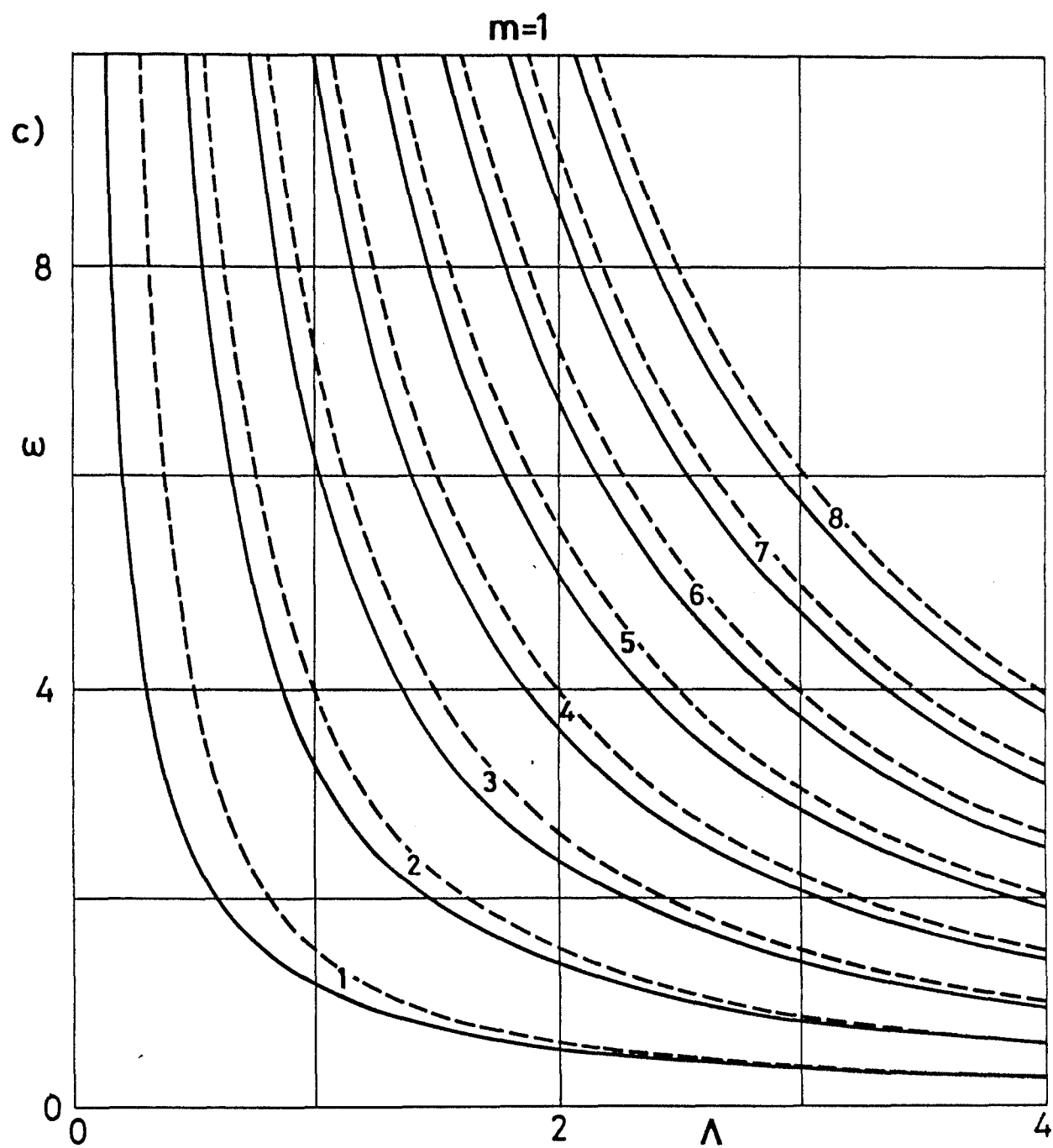


Fig. 2. (Continuación).

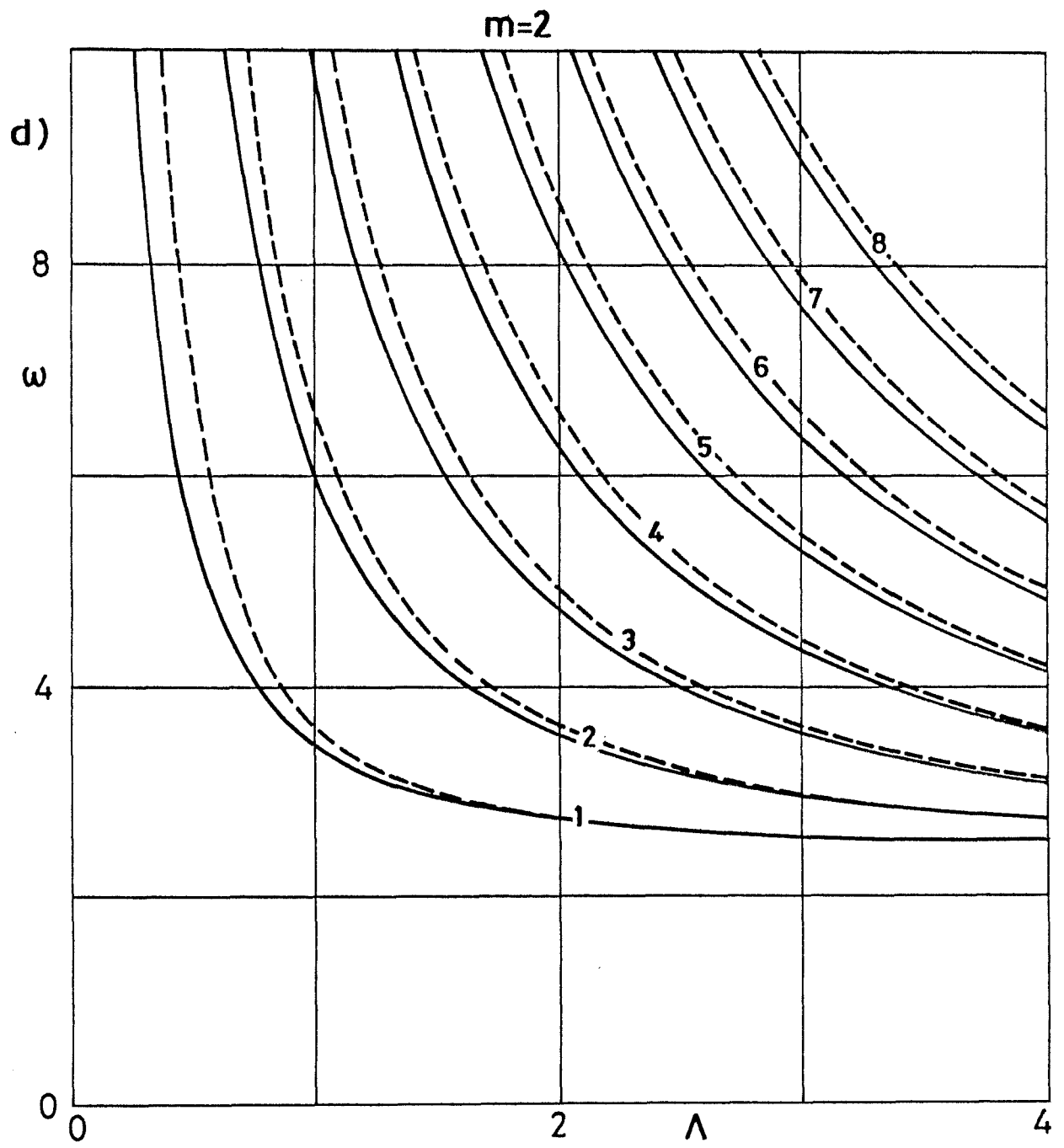


Fig. 2. (Continuación).

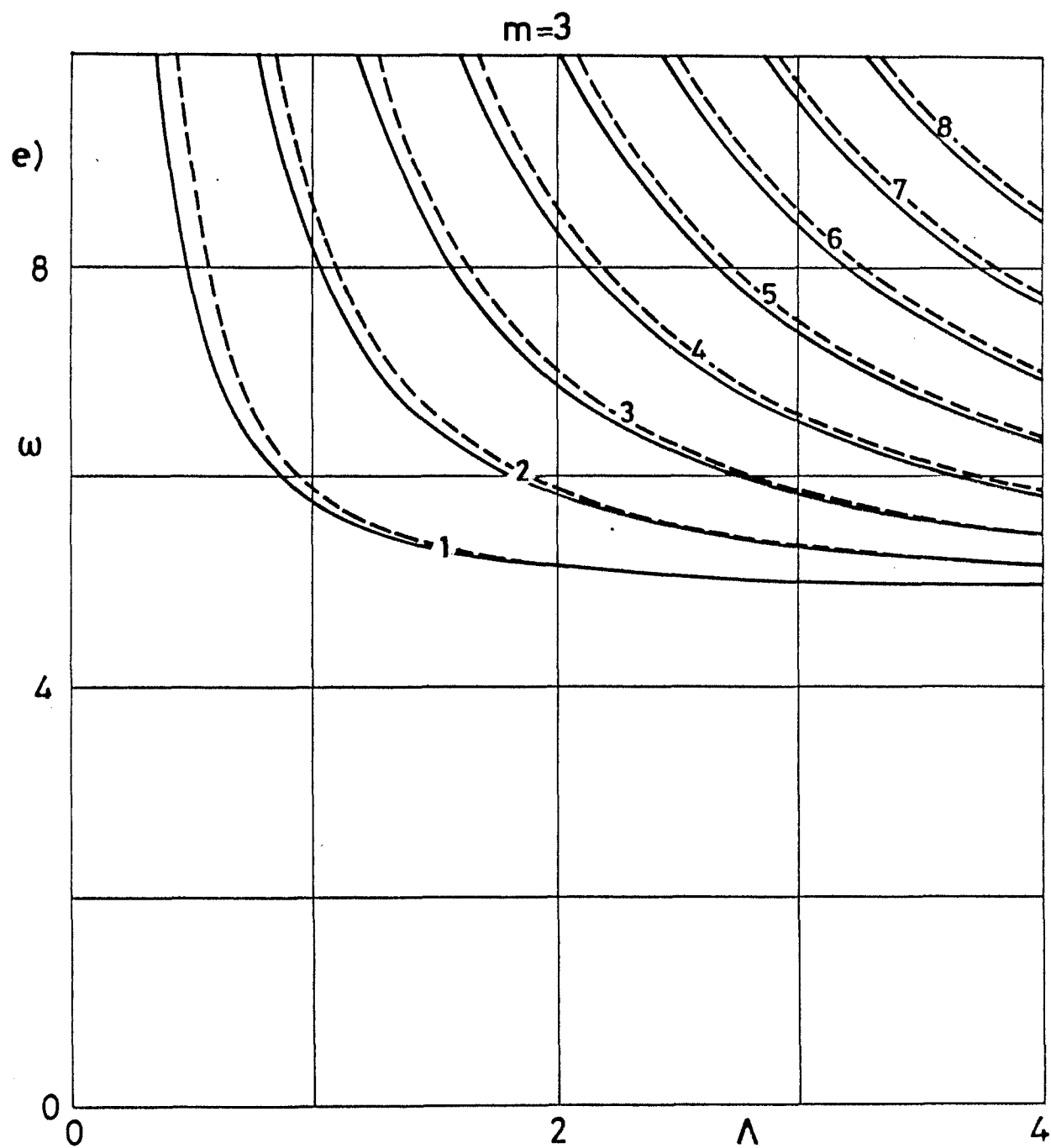


Fig. 2. (Continuación).



solución de (35). Esto significa que  $q_N^m < 0$  siempre, es decir sólo existen oscilaciones y por tanto estos modos son estables, como es bien conocido (Rayleigh 1945, Martínez 1978, Vega & Perales 1983, etc.)

En la Fig. 2 se observa que el umbral de frecuencias necesario para excitar un modo azimutal  $m$  crece con el valor de  $m$ . A medida que aumenta  $m$  también se produce una aproximación entre los valores proporcionados por este modelo y por el de columnas infinitas.

La mayor influencia de los discos en los modos axilsimétricos podría explicarse en la forma siguiente. En estos modos los discos son una barrera para el fluido ya que en todas las secciones salvo en la de los discos el flujo neto es no nulo. En cambio en los modos no axilsimétricos el flujo es nulo por lo que los discos no ejercen un efecto de barrera tan pronunciado. Además, al aumentar  $m$  también crece el flujo en el plano  $r-\theta$ , disminuyendo en el  $r-z$  y por lo tanto, reduciendo la influencia de la presencia de los discos.

La deformación de la entrefase asociada a un modo axial  $N$  se obtiene de sustituir los valores de  $a_{mn}$  de (32) en (20) sabiendo que la transformada inversa en el caso de oscilación pura consiste en multiplicar por  $e^{s_N t}$

$$f = a^m e^{s_N t} \left\{ \frac{C_{m0}}{1 - q_N^m / s_{m0}^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{mn}}{1 - q_N^m / s_{mn}^2} \cos l_n (z + \Lambda) \right\} \cos m \theta \quad (38)$$

$a^m$  se determina de las condiciones iniciales (deformación o velocidad nulas o bien una combinación de ambas). La expresión (38) es válida para todas las posibles deformaciones (simétricas y antisimétricas) y todos los valores de  $m > 0$ , respondiendo a unas u otras según que la suma se efectúe sobre los términos pares o impares. La expresión (38) también se puede aplicar al caso  $m = 0$  sin más que ampliar la definición de los coeficientes  $C_{mn}$  en la forma:

$$C_{02p} = D_{on} \sin \Lambda \quad C_{02p-1} = D_{on} \cos \Lambda \quad (39)$$

En la Fig. 3 se muestra la variación con  $z$  de la deformación para los casos  $m = 0, 1, 2$  y  $3$  y las correspondientes a los tres primeros modos axiales (1, 2 y 3 semiondas). Las formas de los dos primeros modos axiales prácticamente coinciden para los diversos valores de  $m$  y  $\Lambda$ , y coinciden también con  $\cos(\pi z/(2\Lambda))$  y  $\sin(\pi z/\Lambda)$ , respectivamente. En el modo  $N = 3$  ya aparece la influencia de  $m$  y de  $\Lambda$ .

En cuanto al campo de velocidades, en las Figs. 4 y 5 se muestra la variación axial de las tres componentes de la velocidad en la entrefase ( $r = 1$ ) para los primeros valores de  $m$  y del número de semiondas  $N$ . Para designar un modo se emplea la notación  $mN$ . La influencia de los diversos parámetros en la velocidad radial es la misma que en la deformación. Dependiendo del valor de  $m$  aparecen dos comportamientos. Para  $m = 0$ ,  $N$  fijo y una misma deformación, la velocidad axial crece con la esbeltez, al contrario que cuando  $m > 1$ , lo que se puede explicar basándose

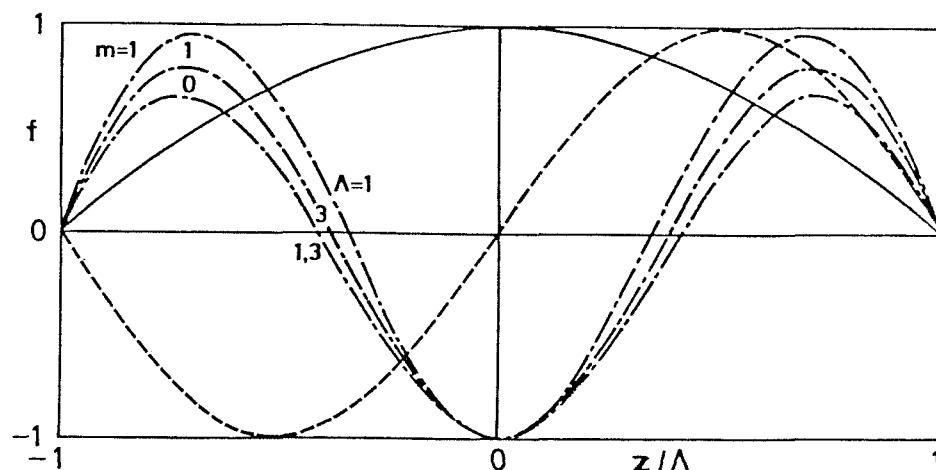


Fig. 3. Variación con la coordenada axial,  $z$ , de la deformación respecto del cilindro,  $f$ , de la interfase de puentes líquidos aislados y rodeados de un baño infinito isodenso, para diversos modos azimutales  $m$  y axiales  $N$ .  $\Lambda$  indica la esbeltez del puente líquido. Línea continua,  $N = 1$  (a trazos  $N = 2$ );  $m = 0, 1, 2, 3$ , y  $\Lambda = 1, 3$ . Línea alternada,  $N = 3$ ; los números indican el valor de  $m$  y de  $\Lambda$ .

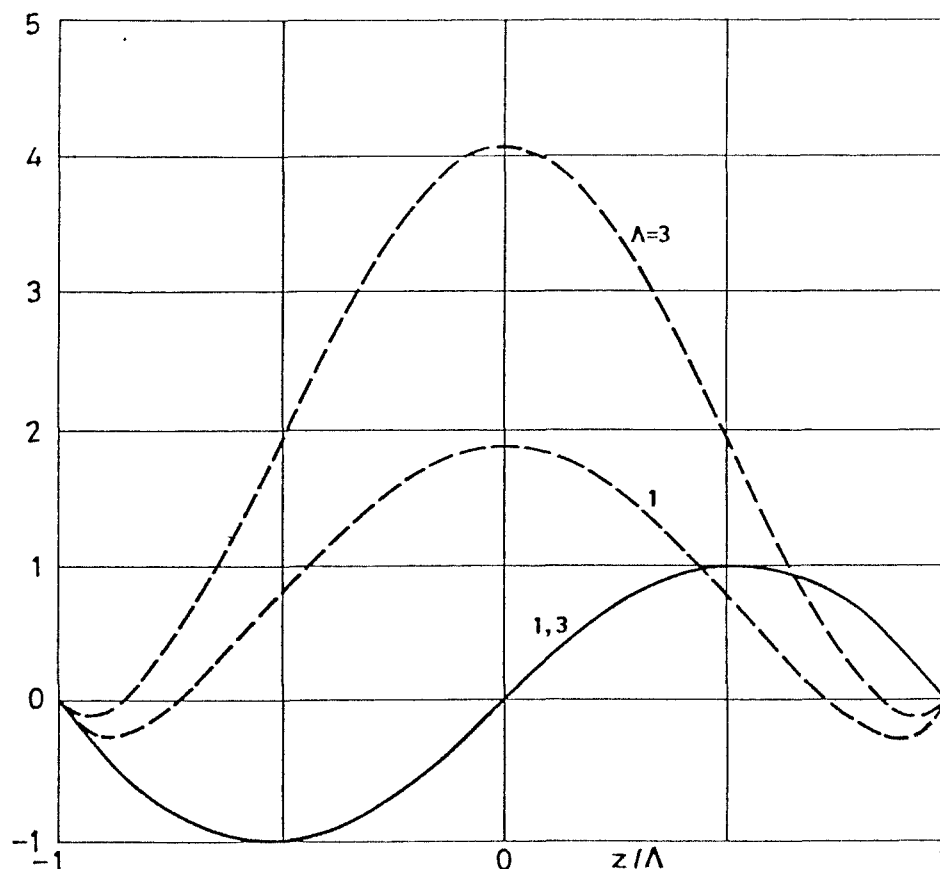


Fig. 4. Variación con la coordenada axial,  $z$ , de las componentes de la velocidad,  $u$  (línea continua) y  $w$  (a trazos), en la interfase ( $r = 1$ ) de un puente líquido, para el modo axilsimétrico  $m = 0$  y primer modo axial, en este caso  $N = 2$ , donde  $N$  indica el número de semiondas de la deformación axial.  $\Lambda$  es la esbeltez de la zona.

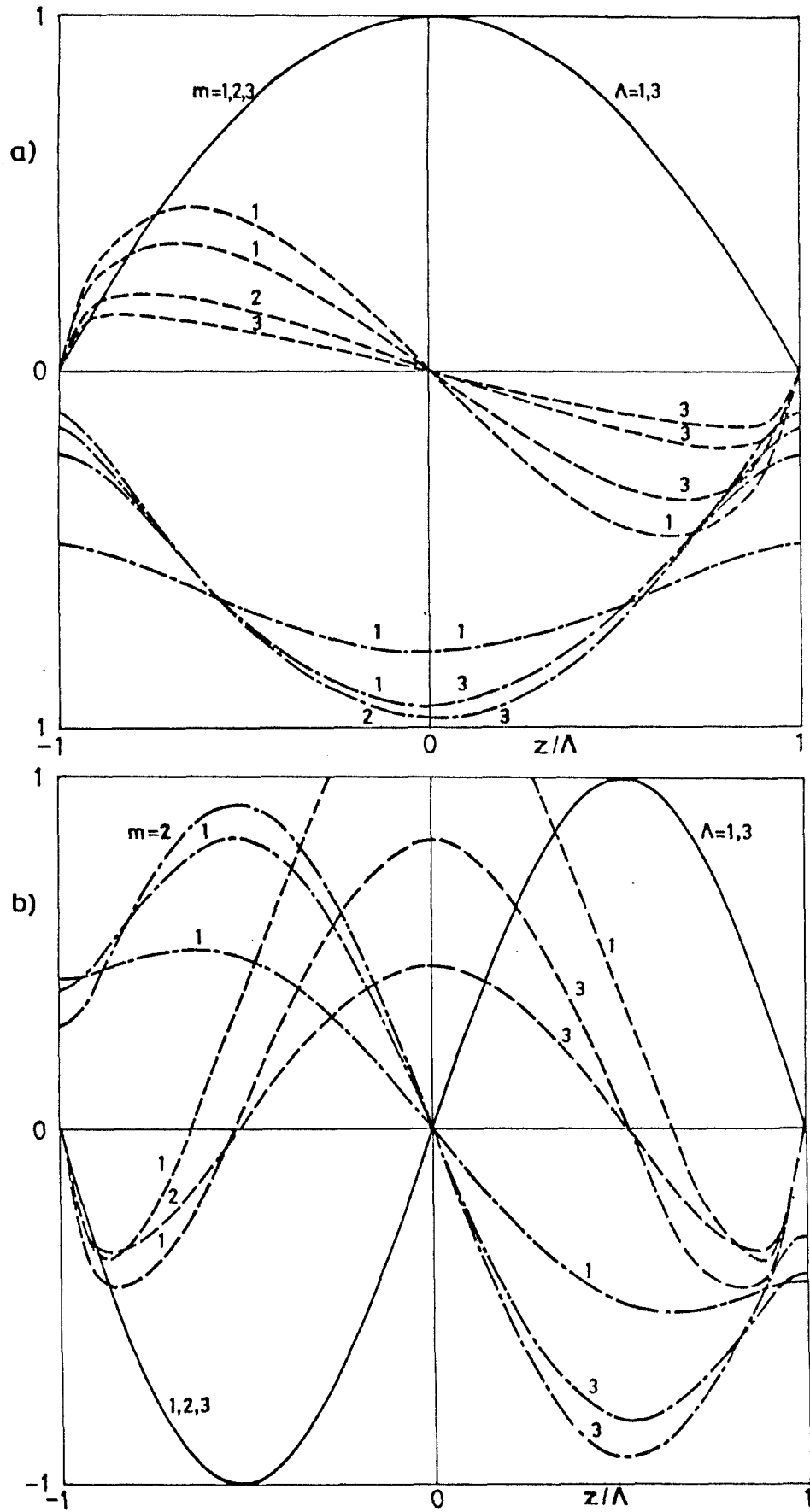


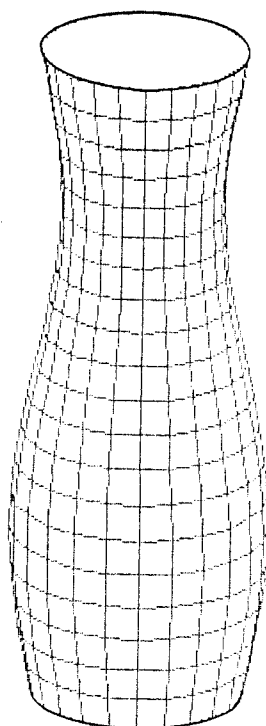
Fig. 5. Variación con la coordenada axial,  $z$ , de las componentes de la velocidad,  $u$ ,  $w$  y  $v$  (línea continua, a trazos y alternada, respectivamente) en la entrefase ( $r=1$ ) de un puente líquido para diversos modos azimutales  $m$  y axiales  $N$ . a)  $N=1$ ; b)  $N=2$ .  $\Lambda$  es la esbeltez de la zona.

en el razonamiento anterior de la existencia o no de flujo neto en cada sección. Mientras que para  $m = 0$   $w$  es bastante más grande que  $u$ , para  $N = 1$  ( $m > 0$ ) la relación entre  $u$  y  $w$  se invierte y al aumentar  $N$   $u$  y  $w$  se hacen del mismo orden.

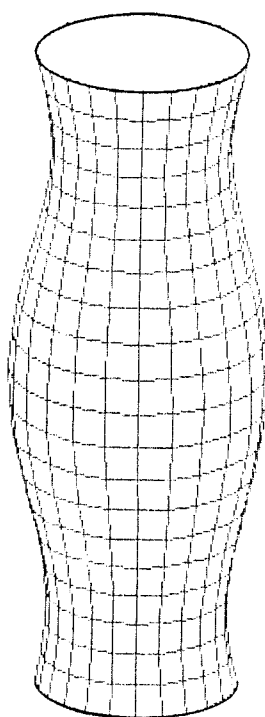
Con objeto de ofrecer una visión más física de los diversos modos propios de oscilación del puente líquido, las formas de la entrefase correspondientes han sido obtenidas calculando la deformación de una malla inicialmente cilíndrica y rectangular, situada en la entrefase, trasladando la posición de sus nodos con la ayuda del campo de velocidades en  $r = 1$  (Fig. 6).

Para mejorar la presentación, la relación de la velocidad axial con las otras dos componentes ha sido adecuadamente elegida. De lo contrario, cuando  $w$  fuera mayor que las otras las deformaciones hubieran presentado efectos no lineales, espúreos al no haber sido tenidos en cuenta en el modelo dichos efectos. Por completar la presentación se han añadido los modos axilsimétricos ( $m = 0$ ) en los cuales el primer modo simétrico es el 03 dado que el 01 no está permitido por razones de conservación del volumen.

En cuanto a la influencia de la densidad del baño exterior, ha sido expuesta con detalle en Sanz (1985). Como ocurre en el caso axilsimétrico, la influencia del baño en las diversas funciones es muy reducida, coincidiendo prácticamente las curvas para  $\rho = 0$  y 1. Como se sabe, la influencia se centra en la reducción de las frecuencias de resonancia. Desde el punto de vista de la

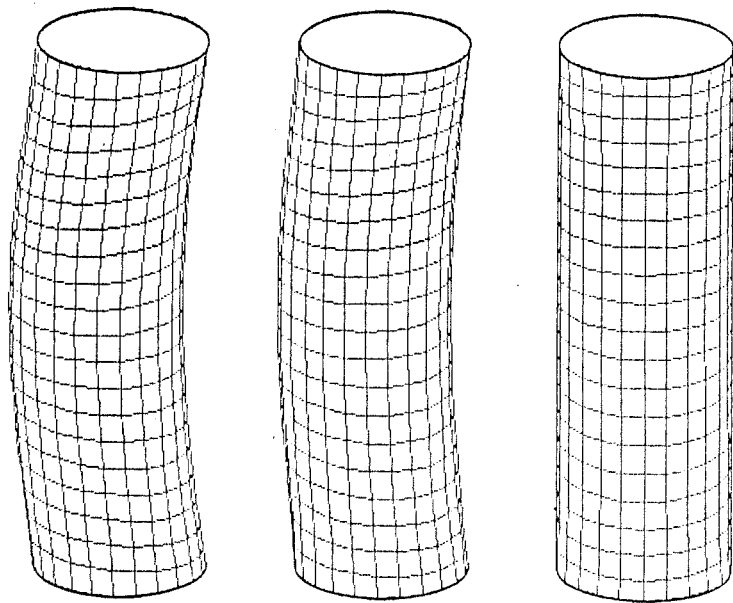


02

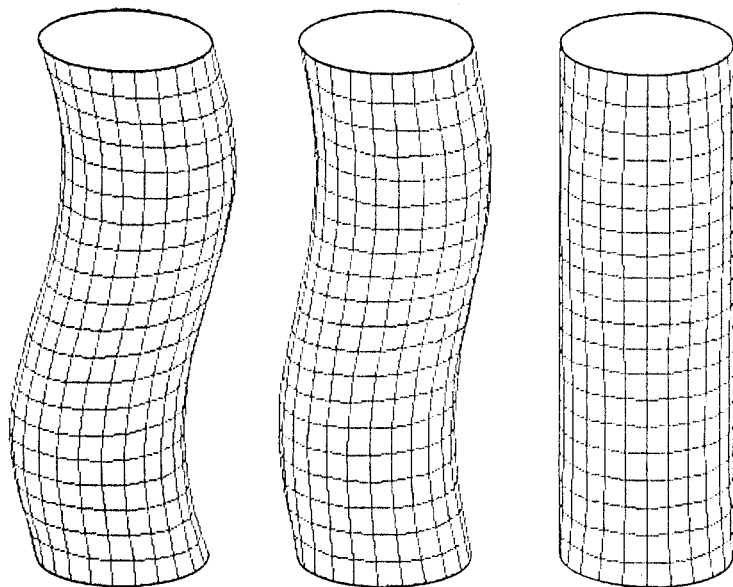


03

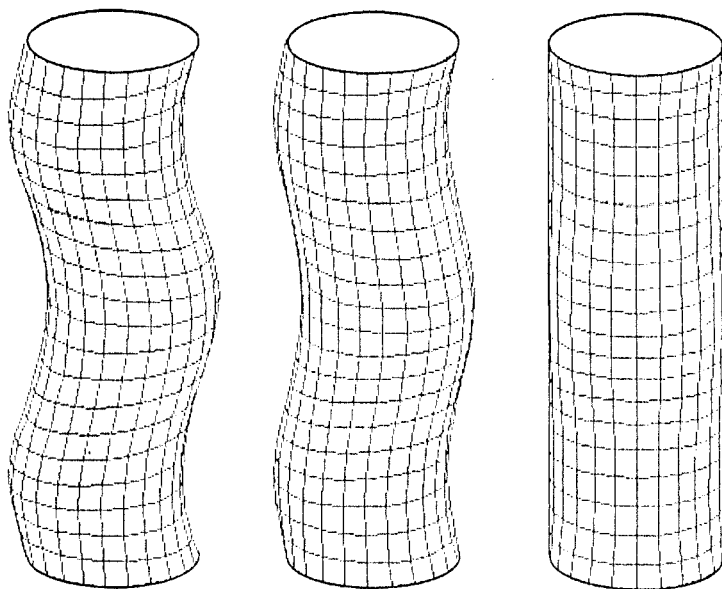
Fig. 6. Modos de oscilación de la interfase de un puente líquido obtenidos por deformación de una malla cilíndrica rectangular cuyos nodos se han trasladado siguiendo el vector velocidad existente en cada nodo. Se utiliza la notación  $mN$ , dígitos que indican el modo azimutal y axial respectivamente. Salvo para modos axilsimétricos, se presentan tres vistas con incremento de  $45^\circ$ .



11

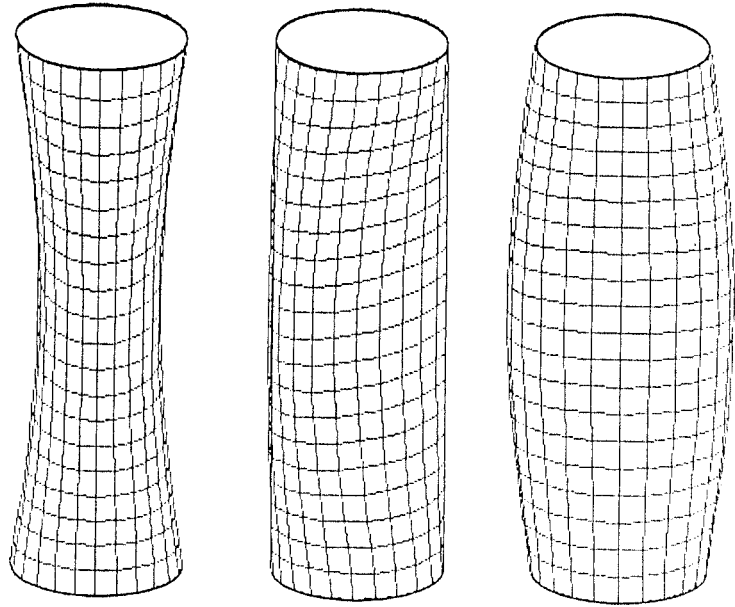


12

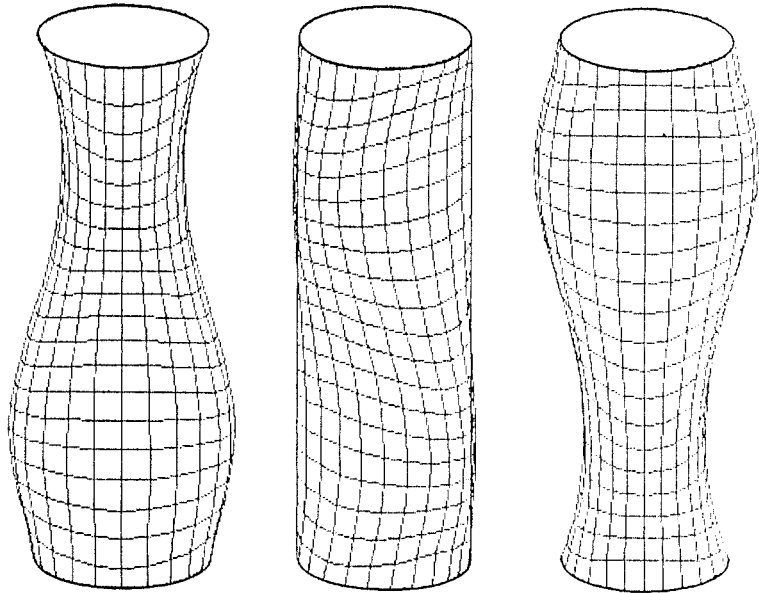


13

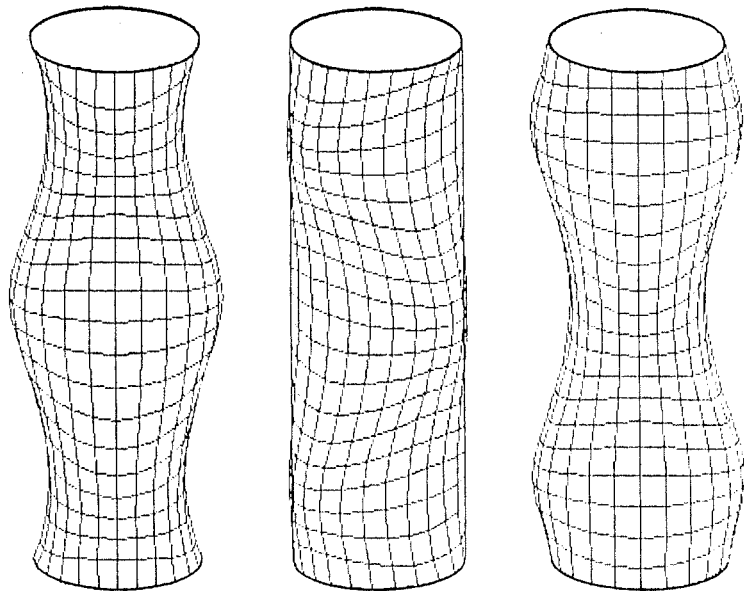
Fig. 6. (Continuación).



21



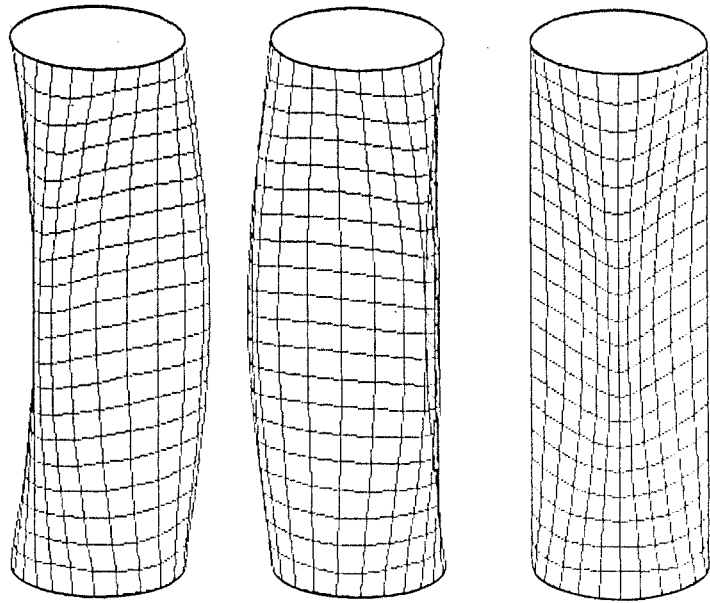
22



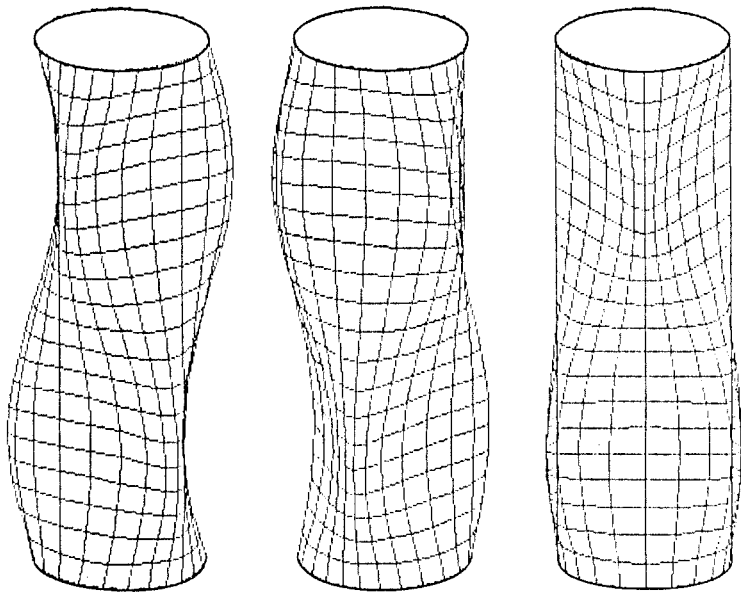
23

Fig. 6. (Continuación).

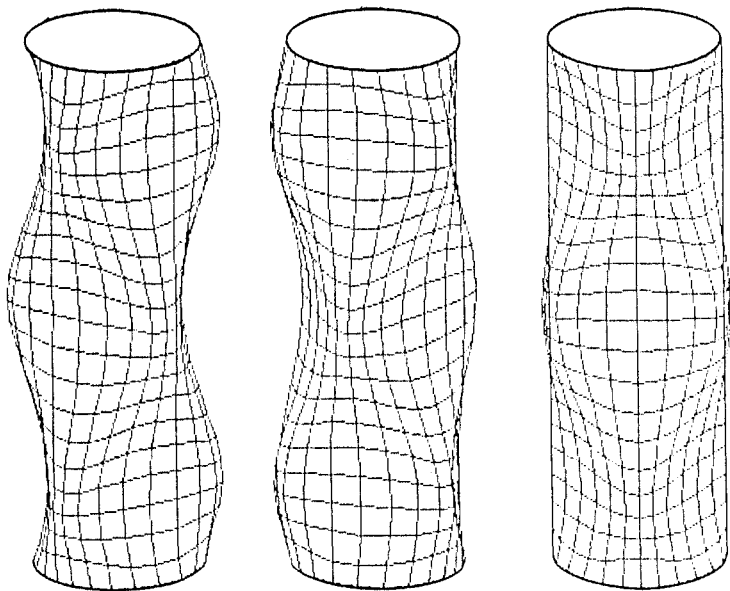




31



32



33

Fig. 6. (Continuación).

experimentación en microgravedad simulada la configuración más sencilla es la  $m = 1$ , por lo que en este caso se ha añadido en el gráfico correspondiente (Fig. 2) la influencia de un baño isodenso.

## 6. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha planteado el problema de la respuesta de un puente líquido rodeado por un fluido exterior ante perturbaciones no axilsimétricas y se han determinado las frecuencias y modos propios de oscilación en los casos de puente aislado y rodeado por un líquido exterior de la misma densidad ( $\rho = 1$ ). Se ha puesto de relieve la influencia de los distintos parámetros así como la diferencia sustancial entre los modos axilsimétricos y no axilsimétricos. A partir de los resultados para  $\rho = 1$  puede empezarse la preparación de experimentos destinados a comprobar la bondad de la aproximación y el rango de validez, lo que se afrontará en próximos trabajos.

## Referencias

Bauer, H.F., 1982, "Coupled oscillations of a solidly rotating liquid bridge". Acta Astronautica 9, pp. 547-563.

Martínez, I., 1978, "Hidroestática de la zona flotante", Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid.

Meseguer, J. "The breaking of axisymmetric slender liquid bridges", J. Fluid Mech. 130, 1983, pp. 123-151.

Meseguer, J. y Sanz, A., "Numerical and experimental study of the dynamics of axisymmetric liquid bridges", J. Fluid Mech. 153, 1985, 83-101.

Meseguer, J., Mayo, L.A., Llorente, J.C., y Fernández, A. "Experiments with liquid bridges in simulated microgravity", J. Crystal Growth 1985, (en prensa).

Rayleigh, Lord, "The theory of sound", Dover, Vol. 2, Chap. 20, 1945, pp. 351-355.

Rivas, D. y Meseguer, J., "One-dimensional, self-similar solution of the dynamics of axisymmetric slender liquid bridges", J. Fluid Mech. 138, 1984, pp. 417-429.

**6 . DATOS DE ALTA PRECISION PARA EL LIMITE DE ESTABILIDAD DE  
ZONAS FLOTANTES**

### 6.1. INTRODUCCION

El conocimiento del volumen mínimo que puede contener una columna líquida, anclada a discos iguales y coaxiales, así como la forma de la interfase correspondiente a dicho límite, son de especial interés. En efecto, existen métodos analíticos procedentes de modelos linealizados y también datos aproximados de otros modelos numéricos, pero es necesario disponer de resultados de gran precisión que proporcionen un estándar con el que comparar los métodos anteriormente citados.

Además, estos resultados exactos pueden permitir detectar desviaciones muy pequeñas en la forma de los puentes líquidos debidas, por ejemplo, a fuerzas electrostáticas.

Se considerará una columna líquida soportada por dos discos planos desiguales (Fig. 1). La hipótesis de que la interfase sólido-líquido es plana no añade restricciones al problema ya que,

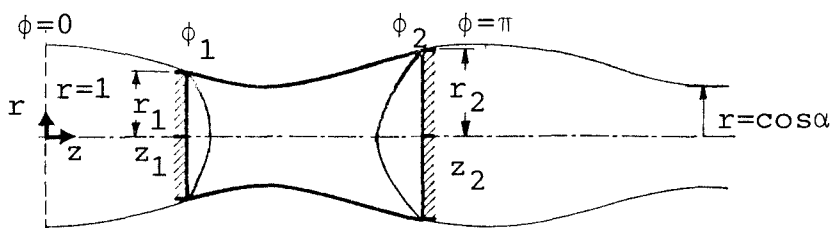


Fig. 1. Geometría y nomenclatura adimensional del puente líquido anclado a discos coaxiales no iguales. Las variables dimensionales se definen en (2) y (3). Las posibles protuberancias de los discos, aquí indicadas, no influyen en este problema.

caso de no serlo, tan sólo ocasionaría un desplazamiento de la escala de volúmenes en una cantidad igual al volumen de la protuberancia inmersa en el líquido. Esta configuración es clásica y ya fue usada entre otros por Plateau en sus trabajos en el siglo XIX.

Los diferentes tipos de formas de equilibrio y los criterios de estabilidad han sido ampliamente estudiados pero hasta ahora no se ha encontrado la manera directa de resolver el problema de encontrar la forma de equilibrio para una geometría dada ( $R_1$ ,  $R_2$  y  $L$ ) y un volumen dado ( $V$ ), ni siquiera para encontrar el volumen mínimo para una geometría dada.

Sin embargo, existen aproximaciones útiles cuando estas formas de equilibrio se apartan poco de la del cilindro, con

$$\frac{L}{R_1+R_2} \simeq \pi \quad \left| \frac{R_1-R_2}{R_1+R_2} \right| \ll 1 \quad \frac{8V}{(R_1+R_2)^3} \simeq \frac{2\pi L}{R_1+R_2}$$

Aunque pueda parecer que la obtención de la forma de equilibrio con mínimo volumen para una geometría dada es inmediata con el auxilio de un ordenador, lo que haría innecesarias las tablas que más adelante se presentan, esto no es así, ya que el cálculo preciso de una sola de estas formas puede tomar varias horas de trabajo interactivo con un ordenador.

La información que describe una zona flotante en ingravidez puede ser condensada en tres cantidades. Sin embargo, en el caso de que la zona esté sometida a una gravedad o a una rotación el

problema no puede reducirse en esta forma aunque en la literatura existe información gráfica aproximada (no de alta precisión).

La importancia de estos resultados sobre las formas de equilibrio es grande, puesto que permite detectar perturbaciones muy pequeñas debido a que cerca del límite de estabilidad los efectos de dichas perturbaciones sobre las formas de las zonas se amplifican mucho y por comparación entre las formas observadas y las obtenidas teóricamente será posible estudiar estas perturbaciones (variaciones en la tensión superficial, efectos de fuerzas electrostáticas, etc...)

## 6.2. FORMULACION

La forma de equilibrio de un puente líquido en reposo, rodeado por otro fluido, con tensión superficial (energía libre por unidad de área) constante es una superficie de revolución de curvatura media constante (según una formulación local) o, desde otro punto de vista, una superficie de revolución de área efectiva mínima (según una formulación integral). Si el puente líquido está anclado a los bordes de los discos el área efectiva es simplemente la de la interfase líquido-fluido exterior.

De acuerdo con la formulación local, la curva meridiana debe de ser parte de una curva de Plateau: cilindro, onduloide, catenoide, nodoide o esfera. Todas las curvas anteriores, excepto la catenoide, pueden ser expresadas en términos de las integrales elípticas de primera clase (F) y de segunda clase (E):

$$z(\alpha, \phi) = \cos\alpha F(\alpha, \phi) + E(\alpha, \phi) \quad (1a)$$

$$r(\alpha, \phi) = (1 - \sin^2\alpha \sin^2\phi)^{1/2} \quad (1b)$$

donde  $\alpha$  identifica la curva de Plateau ( $\cos\alpha$  es el cociente entre los radios del cuello y el vientre de la zona (Fig. 1) y  $\phi$  es el parámetro de barrido de la curva. Una forma de equilibrio puede ser fijada por  $\alpha$  y por sus dos extremos,  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Por tanto, en forma adimensional, tomando  $(R_1+R_2)/2$  como unidad de longitud

$$Z(\alpha, \phi, \phi_1, \phi_2) = 2 \frac{z(\alpha, \phi) - z(\alpha, \phi_1)}{r(\alpha, \phi_1) + r(\alpha, \phi_2)} \quad (2a)$$

$$R(\alpha, \phi, \phi_1, \phi_2) = 2 \frac{r(\alpha, \phi)}{r(\alpha, \phi_1) + r(\alpha, \phi_2)} \quad (2b)$$

con  $\phi_1 < \phi < \phi_2$ . Las relaciones algebraicas entre los parámetros internos de la zona,  $\alpha$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  y los parámetros físicos de entrada,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$  y  $V$  son:

$$K = \frac{R_1}{R_2} = \frac{r(\alpha, \phi_1)}{r(\alpha, \phi_2)} \quad (3a)$$

$$\Lambda = \frac{L}{R_1+R_2} = \frac{z(\alpha, \phi_2) - z(\alpha, \phi_1)}{r(\alpha, \phi_1) + r(\alpha, \phi_2)} \quad (3b)$$

$$V = \frac{8V}{(R_1+R_2)^3} = \frac{8[v(\alpha, \phi_2) - v(\alpha, \phi_1)]}{[r(\alpha, \phi_1) + r(\alpha, \phi_2)]^3} \quad (3c)$$



donde, además de las funciones  $z(\alpha, \phi)$  y  $r(\alpha, \phi)$  ya introducidas, la función  $v(\alpha, \phi)$  que da el volumen de la curva de Plateau hasta la sección  $\phi$  viene definida por:

$$v(\alpha, \phi) = \frac{\pi}{3} [r \sqrt{(1-r^2)(r^2 - \cos^2 \alpha)} - z \cos \alpha + 2(1 + \cos \alpha)^2 E(\alpha, \phi)] \quad (4)$$

### 6.3. FORMA DE EQUILIBRIO

Si fuese posible invertir fácilmente el sistema de ecuaciones (3) el conocimiento de la forma de equilibrio es inmediato a través de las ecs. (2).

Sin embargo, esta inversión no es posible analíticamente y es difícil numéricamente, debido en parte a la gran no-linealidad del problema y en parte a que las funciones inversas de las ecs. (3) son multivaluadas. Es necesario tener una buena aproximación inicial a la forma de equilibrio buscada para poder tener alguna garantía de que la iteración converja a la solución deseada.

La mejor manera de resolver este sistema es suponer un valor de  $\alpha$ . De la ecuación (3a) se puede despejar explícitamente  $\phi_2 = \phi_2(K, \alpha, \phi_1)$  y con ayuda de esta ecuación y de la ec. (3b) tenemos

$$\Lambda = \Lambda(\alpha, \phi_1, \phi_2) = \Lambda(\alpha, \phi_1, \phi_2(K, \alpha, \phi_1)) = \Lambda(\alpha, K, \phi_1)$$

ecuación que puede ser resuelta por cualquier método clásico.

Una vez obtenido  $\phi_1$  es ahora inmediato calcular  $\phi_2$  y  $V$ .

Barriendo para diversos valores de  $\alpha$  se obtiene la función  $V = V(\alpha)$ . De esta relación se puede obtener el  $\alpha$  correspondiente al volumen deseado y una vez conocido el  $\alpha$  correspondiente a la forma de equilibrio buscada es inmediato calcular  $\phi_1$  y  $\phi_2$  y, por tanto, la propia forma de equilibrio. Además, este método permite obtener directamente el volumen mínimo posible para un puente líquido con la esbeltez y diámetro de los discos dados.

Otra forma de solucionar este problema es utilizar desarrollos en serie de funciones ortogonales, por ejemplo, en serie de polinomios de Chebychef. Usando  $L/2$  como unidad de longitud, la forma de la interfase  $r = r(z)$  se puede escribir como  $r(z) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(z)$ , siendo  $T_n$  el polinomio de Chebychef de orden  $n$ , donde los  $N + 1$  coeficientes  $a_n$  se pueden calcular de las condiciones

$$r(-1) = \frac{R_1}{L} \quad r(+1) = \frac{R_2}{L} \quad \int_{-1}^{+1} r^2 dz = \frac{V}{\pi L^3}$$

(anclaje de los discos y conservación del volumen) y

$$\int_{-1}^{+1} r \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} dz = \text{mínimo para cada posible variación de los coeficientes}$$

(la energía de la superficie es mínima para una configuración de equilibrio).

Si se trunca la serie con  $N = 3$ ,  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  pueden ser despejados explícitamente en función de  $R_1/L$ ,  $R_2/L$ ,  $V/\pi L^3$  y  $a_3$  y, por tanto, es posible encontrar fácilmente el mínimo de la última integral. Sin embargo, este método no da, en general, una precisión aceptable.

Otro procedimiento que da una precisión del mismo orden que el anterior se obtiene usando una aproximación lineal.

Cuando  $\Lambda \rightarrow \pi$ ,  $V \rightarrow 2\pi\Lambda$  y  $H \rightarrow 0$

$$R^2(z, H, \Lambda, V) = 1 + \frac{V - 2\pi\Lambda}{2\pi\Lambda} \frac{\cos z - \cos \Lambda}{\frac{\sin \Lambda}{\Lambda} - \cos \Lambda} + 2H \frac{\sin z}{\sin \Lambda} + H^2 \frac{\frac{\sin \Lambda}{\Lambda} - \cos z}{\frac{\sin \Lambda}{\Lambda} - \cos \Lambda} \quad (5)$$

Aquí se usa  $H$ ,  $H = (1-K)/(1+K)$ , en vez de  $K$ ,  $K = (1-H)/(1+H)$ .

Sin embargo, la solución más precisa se obtiene por integración directa de las ecuaciones diferenciales para curvatura media constante (ecuación capilar de Laplace) en la forma

$$\frac{dr}{dz} = t \quad \text{con} \quad r(z=0) = 1-H \quad (6a)$$

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1+t^2}{r} - p(1+t^2)^{3/2} \quad \text{con} \quad t(z=0) = t_0 \quad (6b)$$

$$\frac{dV}{dz} = \pi r^2 \quad \text{con} \quad V(z=0) = 0 \quad (6c)$$

En este cálculo,  $H$  es dado, y  $p$  y  $t_0$  se estiman a partir de la ec. (5), por ejemplo, con un método estándar de integración numérica de Runge-Kutta de las ecs. (6) se obtienen nuevos valores para  $H$ ,  $H = r(z=2\Lambda) - 1$  y  $V$ ,  $V = v(z=2\Lambda)/(1-H+r(z=2\Lambda))^3$  y con una iteración de Newton-Raphson se modifican las suposiciones iniciales de  $p$  y  $t_0$  hasta obtener  $H$  y  $V$  con la precisión deseada.

Este esquema de cálculo se convierte en singular cuando se buscan formas de equilibrio en condiciones próximas a las del límite de estabilidad, lo que lo hace impracticable.

#### 6.4. ESTABILIDAD

Para el análisis de la estabilidad se puede utilizar un enfoque variacional, con la aplicación de la condición del punto conjugado, o un enfoque diferencial, utilizando la condición del jacobiano nulo.

Utilizando este último método la ec. que nos permite determinar el límite de estabilidad por mínimo volumen es

$$\begin{vmatrix} \partial K/\partial \alpha & \partial \Lambda/\partial \alpha & \partial V/\partial \alpha \\ \partial K/\partial \phi_1 & \partial \Lambda/\partial \phi_1 & \partial V/\partial \phi_1 \\ \partial K/\partial \phi_2 & \partial \Lambda/\partial \phi_2 & \partial V/\partial \phi_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

Una vez fijados  $K$  y  $\Lambda$  el sistema formado por las ecs. (3) y (7) consta de cuatro ecuaciones que permiten determinar las cuatro incógnitas,  $\alpha$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $V$ . Dicho sistema, si se elige la solución adecuada (las ecuaciones son multivaluadas), proporciona el mínimo volumen estable,  $V_{\min}$ . Para la correcta elección de dicha solución es necesario conocer con precisión los puntos singulares de entre los puntos del límite de estabilidad. Un valor aproximado puede obtenerse con la ayuda de las Figs. 2 a 5.

Al igual que para el cálculo de las formas de equilibrio, es posible utilizar una expresión lineal para puentes largos entre discos de diámetros no muy diferentes

$$V_{\min} = 2\Lambda(2\Lambda - \pi) - 3\pi \left| \frac{9}{2} \frac{H}{1 - \sin\Lambda/\Lambda} \right|^{3/2} \quad (8)$$

#### 6.5. PUNTOS SINGULARES

A pesar de que todos los puntos en los que aparece el límite de estabilidad por mínimo volumen son singulares en la transformación  $K, \Lambda, V \leftrightarrow \alpha, \phi_1, \phi_2$  de acuerdo con la ec. (7), aquí son estudiados aquellos de entre dichos puntos en los cuales la singularidad permanece aun habiendo tenido previamente en cuenta la singularidad de la ecuación (7).

Estos puntos corresponden al límite de estabilidad de zonas catenoidales, al límite de estabilidad de las zonas con pendiente nula en el disco mayor ( $dr/dz = 0$ ) y al límite de estabilidad de mínima ondulación de Plateau (mínimo  $|\alpha|$  para todos los  $V_{\min}$  con

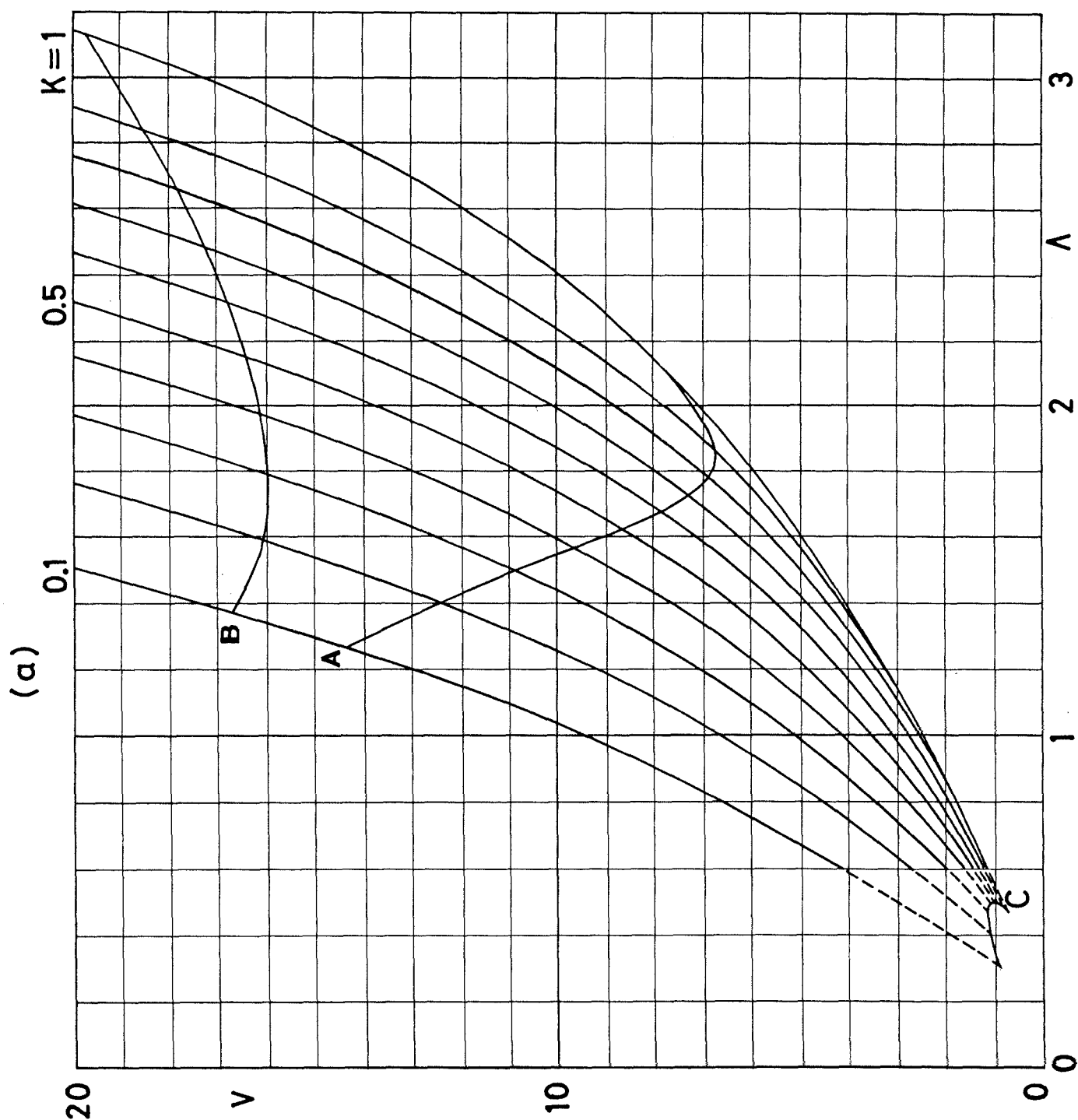


Fig. 2. Volumen mínimo de una zona flotante en reposo,  $V$ , para una relación de diámetros de los discos,  $K$ , y una esbeltez (separación entre discos dividido por diámetro medio),  $\Lambda$ , dadas. En a) se presenta la familia de  $K=\text{cte}$  y en b) la de  $\Lambda=\text{cte}$ . Además, se han incluido las curvas de límites catenoidales C, la de límites con ángulo recto en el disco mayor, A, y la de  $|\alpha|$  mínimo, B.

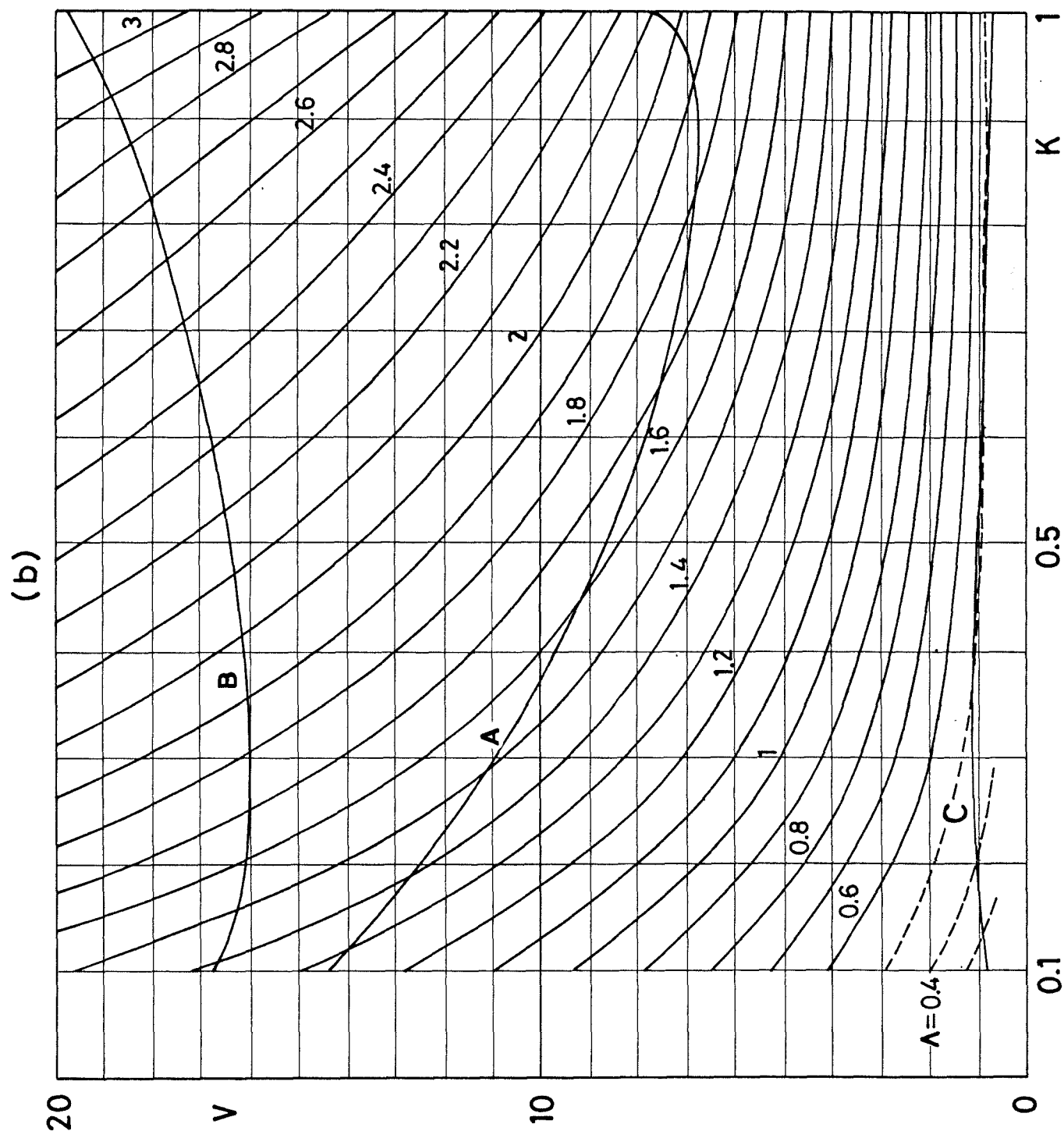


Fig. 2. (Continuación).

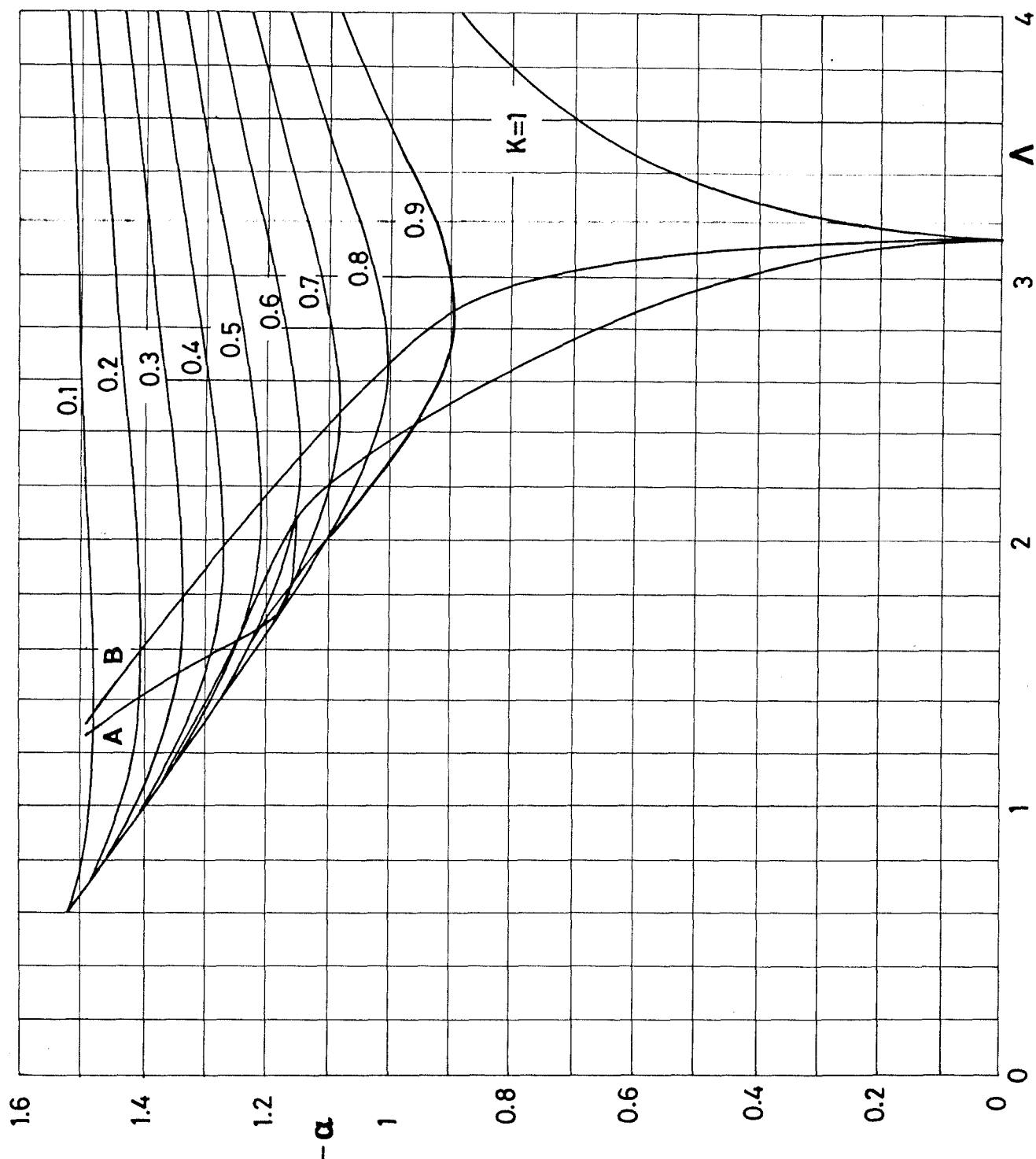


Fig. 3. Relación entre el parámetro que define la curva de Plateau,  $\alpha$ , y la esbeltez de la zona en el límite de estabilidad. Se incluyen las curvas A y B explicadas en la Fig. 2.



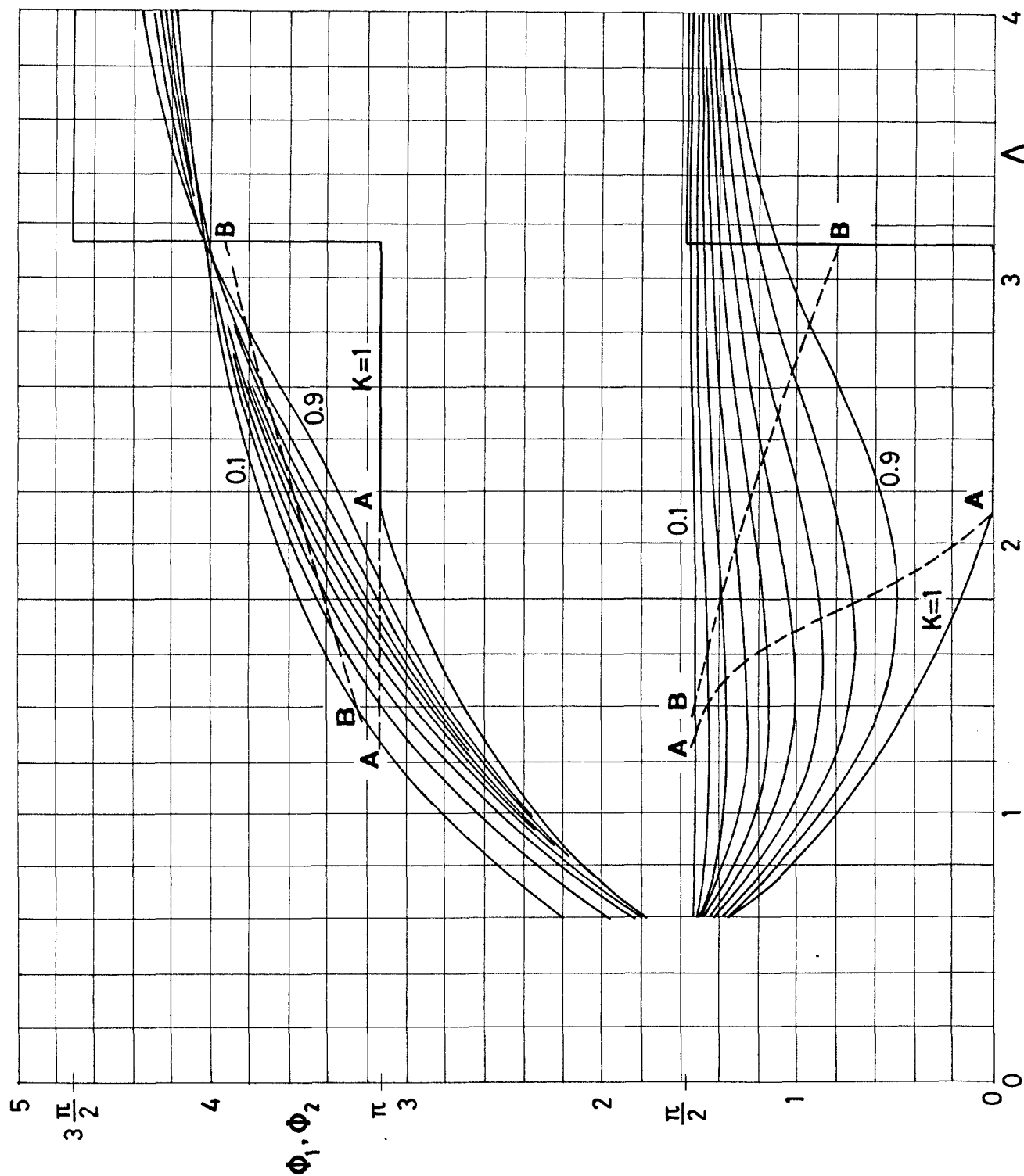


Fig. 4. Valores extremos del parámetro de barrido  $\phi$  que limita la forma de la zona (determinada por el parámetro de Plateau,  $\alpha$ ) en el límite de estabilidad. La familia de curvas superior corresponde a  $\phi_2$  y la inferior a  $\phi_1$  (ver Fig. 1). También se han dibujado las curvas A y B explicadas en la Fig. 2).

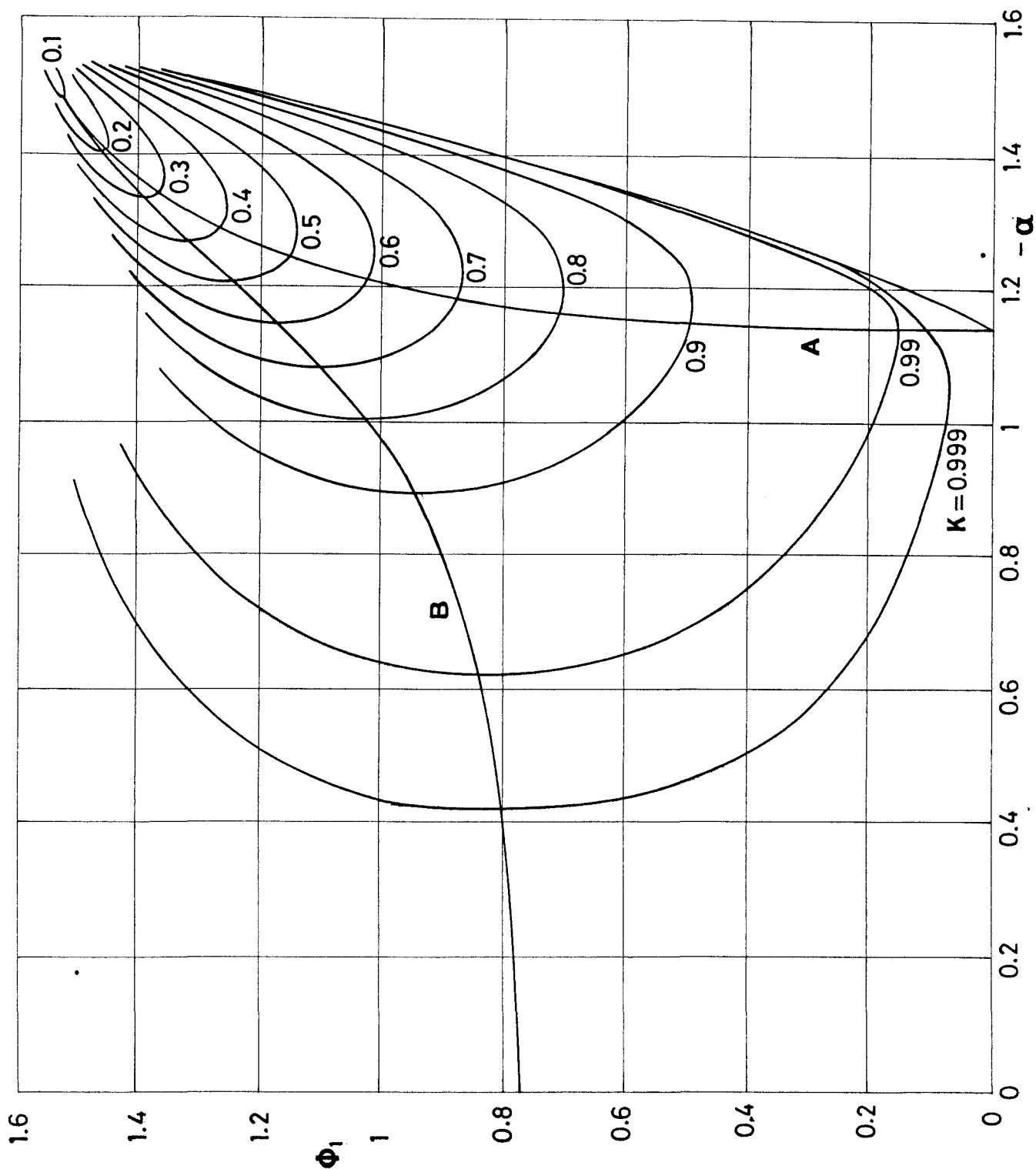


Fig. 5. Relación entre el parámetro que define la curva de Plateau,  $\alpha$ , y el extremo inferior del parámetro de barrido,  $\phi_1$ , en el límite de estabilidad, en función de la relación de tamaño de los discos. Se incluyen las curvas A y B explicadas en la Fig. 2.

K fijo).

El conocimiento de estos puntos es básico para la correcta determinación del mínimo volumen estable de una zona con esbeltez y relación de diámetros de discos dada.

#### 6.5.1. Límite de Estabilidad de Zonas Catenoidales

La formulación general se convierte en singular no sólo para la zona catenoidal de mínimo volumen, sino para todas las zonas catenoidales debido a que en éstas  $\alpha = -\pi/2$  y las integrales elípticas tienen una singularidad para este valor.

Sin embargo, este tipo de zonas admite una formulación particular que permite obtener su límite de estabilidad.

Desplazando el origen de coordenadas y reescalando adecuadamente se pueden expresar las zonas casi-catenoidales como:

$$r(z) = \cosh z + \epsilon y(z)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de equilibrio (ecuación capilar de Laplace en la formulación diferencial o ecuación de Euler en la formulación variacional) la ecuación de estabilidad que se obtiene (condición de Jacobi en la formulación variacional) es

$$y'' - 2 \tanh z y' + p \cosh^3 z = 0 \quad (9)$$

en la que  $p$  es un parámetro interno que, junto a las dos ecuaciones de contorno de la ecuación (9) debe de ser calculado de

$$y(z_1) = 0 \quad (10a)$$

$$y(z_2) = 0 \quad (10b)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} y(z) \cosh z \, dz = 0 \quad (10c)$$

La condición de compatibilidad para que se puedan calcular dichas constantes (que nos permitirá obtener el límite de estabilidad) es

$$\begin{vmatrix} \sinh z_1 & z_1 \sinh z_1 - \cosh z_1 & \cosh^3 z_1 \\ \sinh z_2 & z_2 \sinh z_2 - \cosh z_2 & \cosh^3 z_2 \\ (\cosh 2z_2 - \cosh 2z_1)/4 & f(z_2) - f(z_1) & g(z_2) - g(z_1) \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

donde  $z_1$  se obtiene de la solución no trivial de (11) con

$$z_2 = \text{Arg} \cosh \left( \frac{\cosh z_1}{K} \right) \quad (12)$$

$$f(z) = -\frac{z}{2} - \frac{3}{8} \sinh 2z + \frac{z}{4} \cosh 2z \quad (13a)$$

$$g(z) = \frac{3z}{8} + \frac{1}{4} \sinh 2z + \frac{1}{32} \sinh 4z \quad (13b)$$

Una vez obtenido  $z$  de la ec. (11), la esbeltez del puente y el volumen del líquido vendrán dados por

$$\Lambda = \frac{z_2 - z_1}{\cosh z_2 + \cosh z_1} \quad (14a)$$

$$V = 2\pi \frac{\sinh(2z_2) + 2z_2 - \sinh(2z_1) - 2z_1}{(\cosh z_2 + \cosh z_1)^3} \quad (14b)$$

En la tabla 1 se puede encontrar  $V = f(\Lambda, K)$  para este tipo de puentes. Esta relación ha sido representada en la figura 2.

El conocimiento del mínimo volumen posible para una zona catenoidal tiene gran interés debido a que para dichas zonas el salto de presiones a través de la interfase es nulo y por tanto el uso de zonas catenoidales con volumen ligeramente superior al mínimo posible permitirá detectar las variaciones en la forma de equilibrio debidas a fuerzas muy pequeñas.

#### 6.5.2. Límite de Estabilidad de Zonas con Pendiente Nula en el Disco Mayor

En este caso se pueden calcular explícitamente los valores de  $\phi_1$  y  $\phi_2$

$$\phi_2 = \pi \quad (15a)$$

$$\phi_1 = - \arcsen \frac{\sqrt{1-K^2}}{\sen \alpha} \quad (15b)$$

$$J \begin{vmatrix} K & , & \Lambda & , & V \\ \alpha & , & \phi_1 & , & \phi_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (15c)$$

Tabla 1. Límites de estabilidad de las formas de equilibrio catenoidales. Para cada relación de diámetros de los discos,  $K$ , se dan los puntos extremos de la forma adimensional  $Y=\cosh X$ , y otros parámetros adimensionales de interés.

$K$	$X_1$	$X_2$	$\Lambda$	$V$	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$
1.00	-2.2392	2.2392	.4718	.7129	12.16	12.16
.98	-2.2284	2.2491	.4719	.7132	12.29	12.04
.96	-2.2167	2.2584	.4721	.7142	12.44	11.93
.94	-2.2038	2.2671	.4725	.7160	12.60	11.83
.92	-2.1897	2.2751	.4731	.7185	12.77	11.74
.90	-2.1745	2.2823	.4738	.7218	12.97	11.65
.88	-2.1580	2.2889	.4747	.7260	13.18	11.58
.86	-2.1403	2.2947	.4758	.7310	13.42	11.51
.84	-2.1212	2.2998	.4771	.7370	13.67	11.45
.82	-2.1008	2.3042	.4785	.7439	13.95	11.40
.80	-2.0791	2.3079	.4801	.7517	14.26	11.36
.78	-2.0560	2.3109	.4819	.7605	14.58	11.33
.76	-2.0315	2.3133	.4837	.7704	14.94	11.30
.74	-2.0057	2.3151	.4857	.7812	15.33	11.28
.72	-1.9786	2.3163	.4878	.7930	15.74	11.27
.70	-1.9501	2.3172	.4900	.8058	16.19	11.26
.68	-1.9204	2.3176	.4922	.8197	16.67	11.25
.66	-1.8894	2.3178	.4944	.8344	17.19	11.25
.64	-1.8572	2.3179	.4966	.8502	17.75	11.25
.62	-1.8238	2.3179	.4987	.8667	18.34	11.25
.60	-1.7893	2.3180	.5007	.8842	18.97	11.25
.58	-1.7537	2.3183	.5025	.9023	19.64	11.24
.56	-1.7171	2.3190	.5041	.9211	20.36	11.24
.54	-1.6795	2.3202	.5055	.9404	21.13	11.22
.52	-1.6410	2.3222	.5065	.9601	21.94	11.20
.50	-1.6015	2.3250	.5071	.9801	22.79	11.17
.48	-1.5613	2.3289	.5072	1.0001	23.70	11.13
.46	-1.5202	2.3341	.5068	1.0200	24.67	11.07
.44	-1.4784	2.3408	.5059	1.0395	25.69	11.00
.42	-1.4358	2.3493	.5042	1.0583	26.77	10.90
.40	-1.3926	2.3599	.5017	1.0761	27.90	10.79
.38	-1.3486	2.3727	.4984	1.0925	29.11	10.65
.36	-1.3039	2.3883	.4942	1.1071	30.38	10.49
.34	-1.2586	2.4069	.4889	1.1196	31.71	10.30
.32	-1.2126	2.4290	.4825	1.1292	33.13	10.07
.30	-1.1658	2.4552	.4747	1.1354	34.62	9.81
.28	-1.1184	2.4859	.4656	1.1375	36.20	9.52
.26	-1.0701	2.5220	.4549	1.1348	37.86	9.18
.24	-1.0210	2.5643	.4425	1.1263	39.62	8.80
.22	-.9711	2.6138	.4282	1.1110	41.48	8.38
.20	-.9201	2.6721	.4118	1.0878	43.45	7.91
.18	-.8680	2.7409	.3930	1.0554	45.55	7.38
.16	-.8145	2.8227	.3715	1.0122	47.77	6.80
.14	-.7595	2.9207	.3470	.9565	50.15	6.17
.12	-.7026	3.0400	.3190	.8864	52.70	5.48
.10	-.6433	3.1881	.2869	.7996	55.45	4.72

Este caso es analizado aparte debido a su particular importancia ya que divide la curva de mínimo volumen (para  $K = \text{cte}$ ) en dos regiones. Para los puentes líquidos de mínimo volumen cuya esbeltez es mayor que la de este punto el cuello viaja hacia el disco mayor durante el proceso de rotura.

La condición que permite encontrar fácilmente estos puntos es

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \Lambda} \right|_{\alpha=\text{cte}} = \left. \frac{\partial V}{\partial \Lambda} \right|_{\phi_2=0} \quad (16)$$

con

$$\phi_1 = - \arcsen \frac{\sqrt{1-K^2}}{\sen \alpha}$$

En el caso particular de discos iguales ( $K = 1$ ) la ecuación (15c) se reduce a

$$2E\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

de la que se deduce que  $\Lambda = 2.128392$ .

Los resultados se muestran en la tabla 2.

### 6.5.3. Límite de Estabilidad de Zonas con $|\alpha|$ Mínimo

Como se ha señalado previamente, la forma de equilibrio de un puente líquido axilsimétrico en ingravidez corresponde a un trozo de una curva periódica (curvas de Plateau) que puede ser definida por el cociente de radios cuello/vientre (igual a  $\cos \alpha$ ). Para cada relación de diámetros de discos,  $K$ , hay un pun-

Tabla 2. Límites de estabilidad con 90° de ángulo de contacto en el disco mayor. Para cada relación de diámetros de los discos, K, los parámetros  $\alpha$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2=0$  sirven para calcular la forma del puente y los demás parámetros aquí recogidos: esbeltez, volumen y ángulo de contacto en el disco menor.

K	$\alpha$	$\phi_1$	$\Lambda$	V	$\theta_1 (^\circ)$
1.00	-1.1406	0.0000	2.1285	7.902	90.0
0.98	-1.1413	0.2207	1.9914	7.141	82.7
0.96	-1.1424	0.3129	1.9439	6.944	79.6
0.94	-1.1438	0.3842	1.9105	6.837	77.3
0.92	-1.1456	0.4447	1.8841	6.777	75.3
0.90	-1.1476	0.4984	1.8620	6.747	73.6
0.88	-1.1500	0.5473	1.8427	6.739	72.1
0.86	-1.1526	0.5925	1.8257	6.750	70.7
0.84	-1.1555	0.6348	1.8103	6.775	69.3
0.82	-1.1586	0.6747	1.7962	6.813	68.1
0.80	-1.1619	0.7127	1.7831	6.861	67.0
0.78	-1.1655	0.7490	1.7708	6.920	65.9
0.76	-1.1693	0.7839	1.7592	6.989	64.9
0.74	-1.1734	0.8175	1.7481	7.067	64.0
0.72	-1.1779	0.8499	1.7373	7.152	63.1
0.70	-1.1825	0.8813	1.7270	7.246	62.3
0.68	-1.1873	0.9118	1.7170	7.348	61.5
0.66	-1.1926	0.9414	1.7070	7.458	60.7
0.64	-1.1980	0.9703	1.6972	7.576	60.1
0.62	-1.2038	0.9984	1.6876	7.701	59.4
0.60	-1.2098	1.0257	1.6779	7.835	58.8
0.58	-1.2162	1.0525	1.6682	7.975	58.3
0.56	-1.2229	1.0786	1.6584	8.125	57.8
0.54	-1.2298	1.1042	1.6486	8.283	57.3
0.52	-1.2371	1.1291	1.6386	8.449	56.9
0.50	-1.2447	1.1535	1.6283	8.623	56.6
0.48	-1.2527	1.1774	1.6179	8.806	56.3
0.46	-1.2610	1.2007	1.6071	8.997	56.1
0.44	-1.2695	1.2237	1.5961	9.200	55.9
0.42	-1.2786	1.2459	1.5845	9.409	55.8
0.40	-1.2880	1.2677	1.5726	9.630	55.7
0.38	-1.2978	1.2890	1.5601	9.860	55.7
0.36	-1.3080	1.3098	1.5470	10.101	55.8
0.34	-1.3186	1.3300	1.5333	10.353	55.9
0.32	-1.3295	1.3498	1.5189	10.616	56.1
0.30	-1.3410	1.3689	1.5036	10.890	56.4
0.28	-1.3529	1.3876	1.4874	11.176	56.8
0.26	-1.3652	1.4056	1.4702	11.476	57.2
0.24	-1.3779	1.4231	1.4519	11.788	57.8
0.22	-1.3912	1.4399	1.4322	12.114	58.4
0.20	-1.4049	1.4561	1.4111	12.454	59.1
0.18	-1.4191	1.4717	1.3883	12.809	60.0
0.16	-1.4338	1.4865	1.3635	13.179	60.9
0.14	-1.4490	1.5006	1.3364	13.565	62.0
0.12	-1.4648	1.5139	1.3068	13.969	63.2
0.10	-1.4812	1.5259	1.2737	14.385	64.4



to de la curva de límite de estabilidad de mínimo volumen que tiene  $|\alpha|$  mínimo. Estos puntos han sido aproximados asintóticamente en forma numérica. Los resultados están tabulados en la tabla 3.

#### 6.6. ALGORITMO PARA EL CALCULO DEL MINIMO VOLUMEN Y DE LA FORMA DE EQUILIBRIO

Los datos de entrada son la relación entre los diámetros de los discos,  $K$ , y la esbeltez de la zona,  $\Lambda$ .

1. Entrando con  $K$  en las tablas 2 y 3 se obtienen las esbelteces  $\Lambda_A$  y  $\Lambda_B$  (y los volúmenes) correspondientes a las zonas de mínimo volumen cuya forma de equilibrio tiene pendiente nula en el disco mayor, y a la que tiene  $|\alpha|$  mínimo.

2. Entrando con  $K$  y  $\Lambda$  en la tabla 1 se interpola  $\alpha(K, \Lambda)$ . Esta estimación se utiliza como valor inicial.

3. Entrando con  $K$  y  $\Lambda$  en la tabla 1 se interpola  $\phi_1(K, \Lambda)$ .

4. Con  $\alpha(K, \Lambda)$  y  $\phi_1(K, \Lambda)$  se calcula  $\phi_2$ . Para elegir el valor correcto de  $\phi_2(\alpha, K, \phi_1)$  ( $\phi_2 > \pi$  o  $\phi_2 < \pi$ ) es necesario conocer la posición relativa del punto buscado respecto del punto A ( $\Lambda > \Lambda_A$  o  $\Lambda < \Lambda_A$ ).

5. Se calcula el valor del jacobiano en el punto  $\alpha, \phi_1$ . En general, no será igual a cero y para conseguirlo se cambia ligeramente el valor de  $\phi_1$  y se repiten los pasos 4 y 5 hasta que el jacobiano sea menor que un cierto valor prefijado. Ha de tenerse en cuenta que  $\phi_1$  siempre debe de ser  $\phi_1 < \phi_{1B}$  si  $\Lambda < \Lambda_B$  y  $\phi_1 > \phi_{1B}$  si  $\Lambda > \Lambda_B$ .

Tabla 3. Límite de estabilidad de mínima ondulación de Plateau. Para cada relación de diámetros de los discos,  $K$ , existe un límite de estabilidad que corresponde a  $|\alpha|$  mínimo en función de  $\Lambda$  (véase la Fig. 3). Se presentan aquí los valores de los parámetros  $\alpha$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  que permiten calcular directamente la forma límite del puente, así como la esbeltez y el volumen correspondientes (curva B en la Fig. 2), y los ángulos que forma el líquido con los discos en el borde.

$K$	$\alpha$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\Lambda$	$V$	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	3.1416	19.739	90.00	90.00
0.9	-0.8913	0.9407	0.7033	2.8451	18.556	76.85	102.24
0.8	-1.0012	1.0261	0.6328	2.6561	17.839	72.88	104.68
0.7	-1.0790	1.1028	0.5643	2.4851	17.265	69.87	105.69
0.6	-1.1452	1.1763	0.4935	2.3185	16.777	67.36	105.75
0.5	-1.2070	1.2492	0.4190	2.1513	16.389	65.31	105.00
0.4	-1.2685	1.3221	0.3394	1.9778	16.093	63.78	103.45
0.3	-1.3327	1.3948	0.2556	1.7949	15.944	63.06	101.12
0.2	-1.4025	1.4650	0.1686	1.5945	15.975	63.69	98.03
0.1	-1.4808	1.5280	0.1011	1.3801	16.717	66.98	95.27

6. Para los valores de  $\alpha$  y  $\phi_1$  obtenidos se calcula  $\Lambda$  y  $V_{\min}$ . En general  $\Lambda$  no coincidirá con el valor deseado. En este caso se modifica el valor de  $\alpha$  y se repiten los pasos 4, 5 y 6 hasta que la esbeltez calculada no difiera de la deseada en más de una cantidad prefijada.

El pseudocódigo de las funciones y subrutinas utilizadas es

Función  $\phi_2(K, \alpha, \phi_1)$

$$r_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \phi_1}$$

$$\phi_2 = \pi \pm \arcsin \frac{\sqrt{1 - r_1^2/K^2}}{\sin \alpha}$$

Signo + si  $\Lambda > \Lambda_A$   
Signo - si  $\Lambda < \Lambda_A$

Subrutina Plateau( $\alpha, \phi, z, r, V$ )

Integrales elípticas ( $\alpha, \phi, F, E$ )

$$z = \cos \alpha F + E$$

$$r = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \phi}$$

$$V = \frac{\pi}{3} [r \sqrt{(1-r^2)(r^2 - \cos^2 \alpha)} - z \cos \alpha + 2(1 + \cos \alpha)^2 E(\alpha, \phi)]$$

Subrutina  $\Lambda\_Volumen(\alpha, \phi_1, \Lambda, V)$

$$\phi_2 = \phi_2(\alpha, K, \phi_1)$$

$$\text{Plateau}(\alpha, \phi_1, z_1, r_1, V_1)$$

$$\text{Plateau}(\alpha, \phi_2, z_2, r_2, V_2)$$

$$\Lambda = (z_2 - z_1) / (r_2 + r_1)$$

$$V = 8(V_2 - V_1) / (r_1 + r_2)^3$$

Función Jacobiano( $\alpha, \phi_1$ )

$$\Lambda_{\text{volumen}}(\alpha, \phi_1, \Lambda_o, V_o)$$

$$\Lambda_{\text{volumen}}(\alpha + d\alpha, \phi_1, \Lambda_1, V_1)$$

$$\Lambda_{\text{volumen}}(\alpha, \phi_1 + d\phi_1, \Lambda_2, V_2)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} = \frac{\Lambda_1 - \Lambda_o}{d\alpha}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_1} = \frac{\Lambda_2 - \Lambda_o}{d\phi_1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{V_1 - V_o}{d\alpha}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_1} = \frac{V_2 - V_o}{d\phi_1}$$

$$\text{Jacobiano} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \phi_1} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_1} \frac{\partial V}{\partial \alpha}$$

## 6.7. AJUSTE POLINOMICO DE LA SOLUCION

A la vista de la dificultad que ofrece el algoritmo descrito en el parrafo anterior para calcular el mínimo volumen estable de puentes líquidos para una esbeltez y una relación de diámetros dada, se hace patente la necesidad de un polinomio interpolante que permita obtener de una manera directa este volumen mínimo con una precisión conocida.

Este polinomio es de la forma

$$V_{\min}(\Lambda, K) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{ij} K^i \Lambda^j$$

Tomando  $n=m=7$  se obtiene un polinomio que, dentro del rango  $0.6 < \Lambda < 4$ ,  $0.1 < K < 1$ , aproxima el volumen mínimo con un error relativo menor del 1%. Los coeficientes  $c_{ij}$  están tabulados en la tabla 4.

Sería de un gran interés obtener polinomios interpolantes para  $\alpha(\Lambda, K)$  y  $\phi_1(\Lambda, K)$  que permitirían determinar la forma de la interfase correspondiente a puentes líquidos con mínimo volumen pero, sin embargo, no es posible ya que ambas superficies presentan varias discontinuidades que se agudizan cerca de  $K=1$  y, por tanto, es imposible ajustar con la suficiente precisión un polinomio en sus proximidades.

En la descripción del algoritmo de cálculo para la obtención de valores exactos de  $V_{\min}$  se ha hecho patente la necesidad del conocimiento de la esbeltez correspondiente, para cada valor de la relación del diametro de los discos, a los puntos singulares descritos en §6.5.

Desgraciadamente ni siquiera es posible encontrar polinomios que ajusten estas curvas proporcionando valores con precisiones aceptables, salvo en el caso del límite de estabilidad de zonas catenoidales. Este polinomio es de la forma

Tabla 4. Coeficientes del ajuste polinómico de la función  $V_{\min}(K, \Lambda)$ . El error relativo en la región  $0.1 < K < 1$  y  $0.6 < \Lambda < 4$  es menor del 1% comparado con los valores de la Tabla 5.

$$V(\Lambda, K) = \sum_{i=0}^7 \left( \sum_{j=0}^7 c_{ij} \Lambda^j \right) \cdot K^i$$

	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7
i=0	27.91	-119.95	237.11	-212.37	109.17	-30.87	4.59	-0.28
1	-551.90	2451.98	-4520.89	4126.08	-2105.16	600.35	-89.80	5.49
2	3397.89	-15618.59	29137.22	-27161.71	14041.58	-4052.84	612.33	-37.73
3	-10416.42	49459.58	-94288.08	89794.77	-47151.91	13779.13	-2102.49	130.57
4	18181.95	-88988.93	173539.17	-168569.97	89808.80	-26530.99	4082.00	-255.15
5	-18588.25	93441.34	-185934.68	183638.92	-99000.53	29493.55	-4565.94	286.73
6	10473.69	-53786.46	108710.24	-108717.06	59109.29	-17709.57	2752.43	-173.33
7	-2528.29	13178.01	-26908.39	27130.32	-14827.18	4456.07	-693.87	43.75

$$\Lambda(K) = \sum_{i=0}^n a_i K^i \quad \text{y} \quad V(K) = \sum_{i=0}^m b_i K^i.$$

Tomando  $n=m=4$  se obtienen los desarrollos siguientes que, dentro del rango  $0.1 < K < 1$ , aproximan el volumen mínimo catenoidal con un error relativo menor del 1%:

$$\Lambda(K) = 0,09 + 2,41.K - 4,28.K^2 + 3,45.K^3 - 1,25.K^4$$

$$V(K) = 0,223 + 8,38.K - 13,666.K^2 + 13,488.K^3 - 6,115.K^4.$$

#### REFERENCIAS

1. Martínez, I., 1978 "Floating Zone. Equilibrium Shapes and Stability Criteria", in COSPAR Space Research XVIII, pp 519-522.
2. Da Riva, I. and Martínez, I., 1979 "Floating Zone Stability", ESA SP-142, pp 67-73.
3. Martínez, I., 1983 "Stability of Axisymmetric Liquid Bridges", ESA SP-191, pp 267-273.

Tabla 5. Límite de estabilidad de puentes líquidos axil simétricos en reposo. Se presenta el volumen mínimo, V, en función de la relación de diámetros, K, y la esbeltez,  $\Lambda$ , así como los parámetros  $\alpha$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  que permiten calcular directamente la forma del puente. También se muestran los ángulos que el líquido forma con los discos.

<u>K = 1</u>						
$\Lambda$	V	$\alpha$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$
0.6	1.107	-1.5230	1.3500	1.7914	24.7	24.7
0.7	1.421	-1.4890	1.1950	1.9471	33.3	33.3
0.8	1.744	-1.4570	1.0530	2.0890	41.0	41.0
0.9	2.080	-1.4260	0.9235	2.2181	47.9	47.9
1.0	2.431	-1.3980	0.8061	2.3355	54.0	54.0
1.1	2.800	-1.3710	0.6992	2.4424	59.4	59.4
1.2	3.187	-1.3450	0.6018	2.5398	64.3	64.3
1.3	3.595	-1.3200	0.5130	2.6286	68.6	68.6
1.4	4.025	-1.2960	0.4316	2.7100	72.4	72.4
1.5	4.478	-1.2730	0.3569	2.7847	75.8	75.8
1.6	4.955	-1.2500	0.2882	2.8534	78.8	78.8
1.7	5.456	-1.2290	0.2248	2.9168	81.5	81.5
1.8	5.984	-1.2070	0.1660	2.9756	83.9	83.9
1.9	6.537	-1.1870	0.1114	3.0302	86.0	86.0
2.0	7.118	-1.1660	0.0605	3.0811	87.9	87.9
2.1	7.725	-1.1460	0.0130	3.1286	89.6	89.6
2.2	8.372	-1.1000	0.0000	3.1416	90.0	90.0
2.3	9.098	-1.0410	0.0000	3.1416	90.0	90.0
2.4	9.915	-0.9770	0.0000	3.1416	90.0	90.0
2.5	10.831	-0.9087	0.0000	3.1416	90.0	90.0
2.6	11.855	-0.8346	0.0000	3.1416	90.0	90.0
2.7	12.998	-0.7532	0.0000	3.1416	90.0	90.0
2.8	14.270	-0.6620	0.0000	3.1416	90.0	90.0
2.9	15.682	-0.5562	0.0000	3.1416	90.0	90.0
3.0	17.245	-0.4253	0.0000	3.1416	90.0	90.0
3.1	18.971	-0.2302	0.0000	3.1416	90.0	90.0
3.2	20.871	-0.2692	1.5710	1.5708	90.0	90.0
3.3	22.959	-0.4338	1.5710	1.5708	90.0	90.0
3.4	25.247	-0.5427	1.5710	1.5708	90.0	90.0
3.5	27.749	-0.6264	1.5710	1.5708	90.0	90.0
3.6	30.477	-0.6948	1.5710	1.5708	90.0	90.0
3.7	33.446	-0.7526	1.5710	1.5708	90.0	90.0
3.8	36.669	-0.8025	1.5710	1.5708	90.0	90.0
3.9	40.161	-0.8463	1.5710	1.5708	90.0	90.0
4.0	43.937	-0.8851	1.5710	1.5708	90.0	90.0

<u>K = 0.9</u>						
$\Lambda$	V	$\alpha$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$
0.6	1.115	-1.5240	1.3670	1.7992	24.6	24.6
0.7	1.433	-1.4890	1.2210	1.9633	32.7	33.6
0.8	1.762	-1.4570	1.0900	2.1137	39.9	41.8
0.9	2.104	-1.4260	0.9730	2.2514	46.2	49.1



Tabla 5. (Continuación).

$\Lambda$	V	$\alpha$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$
1.0	2.462	-1.3970	0.8691	2.3779	51.8	55.6
1.1	2.840	-1.3690	0.7780	2.4942	56.6	61.5
1.2	3.240	-1.3420	0.6993	2.6017	60.7	66.8
1.3	3.665	-1.3150	0.6332	2.7012	64.2	71.6
1.4	4.119	-1.2890	0.5799	2.7935	67.1	75.8
1.5	4.606	-1.2610	0.5396	2.8792	69.4	79.6
1.6	5.131	-1.2320	0.5124	2.9585	71.2	83.0
1.7	5.703	-1.2020	0.4979	3.0321	72.6	86.0
1.8	6.328	-1.1690	0.4950	3.1008	73.6	88.6
1.9	7.017	-1.1340	0.5023	3.1661	74.3	90.8
2.0	7.778	-1.0980	0.5188	3.2295	74.8	92.7
2.1	8.621	-1.0620	0.5435	3.2929	75.3	94.4
2.2	9.557	-1.0260	0.5763	3.3577	75.6	95.9
2.3	10.596	-0.9920	0.6168	3.4253	75.9	97.2
2.4	11.749	-0.9608	0.6649	3.4965	76.1	98.3
2.5	13.026	-0.9339	0.7199	3.5715	76.3	99.4
2.6	14.440	-0.9129	0.7807	3.6499	76.5	100.3
2.7	16.002	-0.8988	0.8453	3.7300	76.6	101.2
2.8	17.724	-0.8920	0.9113	3.8097	76.8	101.9
2.9	19.618	-0.8923	0.9758	3.8866	76.9	102.6
3.0	21.698	-0.8990	1.0370	3.9587	77.1	103.3
3.1	23.976	-0.9106	1.0920	4.0245	77.2	103.9
3.2	26.466	-0.9260	1.1420	4.0834	77.3	104.4
3.3	29.181	-0.9438	1.1860	4.1357	77.4	104.9
3.4	32.136	-0.9630	1.2240	4.1816	77.5	105.4
3.5	35.345	-0.9829	1.2570	4.2219	77.6	105.8
3.6	38.823	-1.0030	1.2860	4.2573	77.7	106.2
3.7	42.585	-1.0230	1.3110	4.2885	77.8	106.6
3.8	46.646	-1.0420	1.3320	4.3160	77.9	107.0

$\kappa = 0.8$

$\Lambda$	V	$\alpha$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$
0.6	1.142	-1.5250	1.3920	1.7975	24.4	24.2
0.7	1.475	-1.4900	1.2590	1.9690	31.9	33.7
0.8	1.821	-1.4570	1.1420	2.1259	38.5	42.2
0.9	2.182	-1.4250	1.0390	2.2696	44.3	49.8
1.0	2.564	-1.3950	0.9510	2.4012	49.3	56.7
1.1	2.971	-1.3660	0.8774	2.5219	53.5	62.8
1.2	3.408	-1.3370	0.8177	2.6329	57.1	68.2
1.3	3.879	-1.3070	0.7716	2.7352	60.0	73.1
1.4	4.391	-1.2780	0.7383	2.8297	62.4	77.4
1.5	4.951	-1.2480	0.7170	2.9177	64.4	81.3
1.6	5.566	-1.2180	0.7066	3.0002	66.0	84.7
1.7	6.244	-1.1870	0.7062	3.0786	67.2	87.7
1.8	6.994	-1.1570	0.7147	3.1544	68.3	90.4
1.9	7.825	-1.1270	0.7314	3.2280	69.2	92.8
2.0	8.748	-1.0990	0.7553	3.3012	69.9	95.0
2.1	9.773	-1.0730	0.7858	3.3742	70.5	96.9
2.2	10.910	-1.0500	0.8220	3.4476	71.1	98.6

Tabla 5. (Continuación).

$\Lambda$	V	$\alpha$	$\varnothing_1$	$\varnothing_2$	$\vartheta_1(^{\circ})$	$\vartheta_2(^{\circ})$
2.3	12.171	-1.0310	0.8628	3.5212	71.5	100.2
2.4	13.566	-1.0160	0.9071	3.5944	72.0	101.6
2.5	15.109	-1.0070	0.9533	3.6665	72.4	102.9
2.6	16.810	-1.0020	1.0000	3.7365	72.7	104.1
2.7	18.684	-1.0020	1.0460	3.8034	73.0	105.1
2.8	20.742	-1.0050	1.0900	3.8663	73.3	106.1
2.9	22.999	-1.0130	1.1310	3.9248	73.6	107.1
3.0	25.468	-1.0220	1.1690	3.9785	73.8	107.9
3.1	28.162	-1.0340	1.2040	4.0275	74.1	108.7
3.2	31.097	-1.0470	1.2350	4.0719	74.3	109.5
3.3	34.287	-1.0610	1.2630	4.1121	74.5	110.1
3.4	37.748	-1.0760	1.2880	4.1483	74.7	110.8
3.5	41.494	-1.0910	1.3100	4.1811	74.9	111.4
3.6	45.540	-1.1050	1.3300	4.2108	75.1	112.0

**K = 0.7**

0.6	1.194	-1.5280	1.4230	1.7867	24.6	23.5
0.7	1.555	-1.4910	1.3050	1.9648	31.5	33.4
0.8	1.931	-1.4570	1.2020	2.1271	37.5	42.2
0.9	2.328	-1.4250	1.1140	2.2753	42.7	50.1
1.0	2.752	-1.3930	1.0410	2.4108	47.1	57.1
1.1	3.207	-1.3630	0.9825	2.5350	50.9	63.4
1.2	3.701	-1.3320	0.9373	2.6493	54.1	69.0
1.3	4.241	-1.3030	0.9047	2.7550	56.8	74.0
1.4	4.834	-1.2730	0.8836	2.8537	59.0	78.5
1.5	5.488	-1.2440	0.8728	2.9464	60.9	82.4
1.6	6.212	-1.2160	0.8713	3.0346	62.5	86.0
1.7	7.014	-1.1890	0.8781	3.1194	63.8	89.2
1.8	7.906	-1.1640	0.8924	3.2011	65.0	92.1
1.9	8.896	-1.1420	0.9129	3.2809	66.0	94.6
2.0	9.996	-1.1220	0.9387	3.3590	66.8	97.0
2.1	11.217	-1.1060	0.9687	3.4352	67.6	99.1
2.2	12.570	-1.0940	1.0020	3.5094	68.3	101.0
2.3	14.068	-1.0850	1.0370	3.5812	68.9	102.8
2.4	15.723	-1.0800	1.0730	3.6501	69.4	104.4
2.5	17.548	-1.0790	1.1080	3.7154	69.9	105.9
2.6	19.556	-1.0810	1.1420	3.7770	70.4	107.3
2.7	21.762	-1.0860	1.1750	3.8344	70.8	108.5
2.8	24.178	-1.0930	1.2060	3.8876	71.2	109.7
2.9	26.819	-1.1010	1.2340	3.9367	71.6	110.8
3.0	29.700	-1.1110	1.2600	3.9817	71.9	111.8
3.1	32.837	-1.1220	1.2840	4.0229	72.2	112.7
3.2	36.243	-1.1340	1.3050	4.0607	72.5	113.6
3.3	39.936	-1.1450	1.3250	4.0952	72.8	114.4
3.4	43.930	-1.1570	1.3420	4.1267	73.0	115.2

Tabla 5. (Continuaci3n).

**K = 0.6**

$\Lambda$	V	$\alpha$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$
0.6	1.278	-1.5310	1.4550	1.7719	25.7	22.7
0.7	1.684	-1.4930	1.3520	1.9560	31.7	32.9
0.8	2.108	-1.4580	1.2640	2.1237	37.1	42.0
0.9	2.559	-1.4250	1.1910	2.2766	41.8	50.1
1.0	3.043	-1.3930	1.1310	2.4166	45.8	57.4
1.1	3.568	-1.3620	1.0850	2.5454	49.3	63.9
1.2	4.142	-1.3320	1.0520	2.6645	52.3	69.6
1.3	4.773	-1.3030	1.0290	2.7754	54.8	74.8
1.4	5.470	-1.2760	1.0170	2.8795	56.9	79.4
1.5	6.243	-1.2500	1.0130	2.9778	58.8	83.6
1.6	7.101	-1.2260	1.0180	3.0715	60.4	87.3
1.7	8.054	-1.2060	1.0290	3.1614	61.7	90.7
1.8	9.114	-1.1870	1.0450	3.2470	62.9	93.8
1.9	10.292	-1.1720	1.0660	3.3294	64.0	96.5
2.0	11.600	-1.1600	1.0900	3.4085	65.0	99.1
2.1	13.050	-1.1520	1.1160	3.4839	65.8	101.4
2.2	14.655	-1.1470	1.1440	3.5555	66.6	103.5
2.3	16.429	-1.1450	1.1710	3.6230	67.2	105.4
2.4	18.384	-1.1460	1.1980	3.6864	67.9	107.2
2.5	20.534	-1.1490	1.2250	3.7455	68.4	108.8
2.6	22.895	-1.1540	1.2490	3.8004	69.0	110.4
2.7	25.481	-1.1610	1.2730	3.8512	69.4	111.8
2.8	28.307	-1.1690	1.2940	3.8980	69.9	113.1
2.9	31.388	-1.1770	1.3140	3.9412	70.3	114.3
3.0	34.740	-1.1860	1.3320	3.9809	70.7	115.4
3.1	38.380	-1.1960	1.3490	4.0174	71.1	116.5
3.2	42.323	-1.2060	1.3640	4.0511	71.4	117.5

**K = 0.5**

0.6	1.408	-1.5330	1.4810	1.7635	28.1	22.1
0.7	1.880	-1.4950	1.3950	1.9530	33.3	32.6
0.8	2.374	-1.4590	1.3230	2.1260	38.0	42.0
0.9	2.902	-1.4260	1.2640	2.2843	42.1	50.4
1.0	3.471	-1.3940	1.2180	2.4298	45.7	57.8
1.1	4.091	-1.3640	1.1840	2.5641	48.9	64.5
1.2	4.772	-1.3360	1.1600	2.6888	51.6	70.5
1.3	5.524	-1.3110	1.1460	2.8052	54.0	75.9
1.4	6.357	-1.2870	1.1410	2.9145	56.0	80.7
1.5	7.283	-1.2670	1.1430	3.0176	57.8	85.0
1.6	8.311	-1.2490	1.1500	3.1152	59.3	89.0
1.7	9.454	-1.2350	1.1630	3.2070	60.7	92.5
1.8	10.725	-1.2230	1.1790	3.2940	62.0	95.7
1.9	12.136	-1.2150	1.1980	3.3761	63.0	98.7
2.0	13.700	-1.2100	1.2180	3.4532	64.0	101.4
2.1	15.432	-1.2070	1.2380	3.5255	64.9	103.8
2.2	17.345	-1.2070	1.2590	3.5929	65.7	106.1
2.3	19.453	-1.2090	1.2800	3.6555	66.4	108.2
2.4	21.772	-1.2130	1.2990	3.7136	67.1	110.1

Tabla 5. (Continuación).

$\Lambda$	V	$\alpha$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\Theta_1(^{\circ})$	$\Theta_2(^{\circ})$
2.5	24.317	-1.2180	1.3180	3.7673	67.7	111.8
2.6	27.104	-1.2240	1.3350	3.8170	68.2	113.5
2.7	30.148	-1.2310	1.3510	3.8627	68.7	115.0
2.8	33.467	-1.2390	1.3660	3.9050	69.2	116.4
2.9	37.075	-1.2470	1.3800	3.9439	69.7	117.7
3.0	40.992	-1.2550	1.3920	3.9799	70.1	119.0

**K = 0.4**

0.6	1.616	-1.5310	1.4970	1.7775	32.3	22.5
0.7	2.181	-1.4940	1.4310	1.9708	36.6	33.2
0.8	2.775	-1.4600	1.3770	2.1483	40.5	42.7
0.9	3.410	-1.4280	1.3330	2.3116	44.0	51.3
1.0	4.098	-1.3990	1.3000	2.4623	47.1	58.9
1.1	4.850	-1.3720	1.2770	2.6018	49.9	65.8
1.2	5.677	-1.3490	1.2630	2.7313	52.3	72.0
1.3	6.592	-1.3280	1.2570	2.8519	54.5	77.5
1.4	7.607	-1.3110	1.2570	2.9645	56.4	82.5
1.5	8.734	-1.2960	1.2620	3.0697	58.0	87.0
1.6	9.987	-1.2860	1.2700	3.1682	59.5	91.1
1.7	11.379	-1.2770	1.2820	3.2594	60.8	94.8
1.8	12.923	-1.2720	1.2960	3.3445	62.0	98.2
1.9	14.636	-1.2690	1.3100	3.4235	63.0	101.2
2.0	16.530	-1.2690	1.3250	3.4968	64.0	104.0
2.1	18.623	-1.2700	1.3400	3.5645	64.8	106.6
2.2	20.928	-1.2730	1.3550	3.6270	65.6	109.0
2.3	23.463	-1.2770	1.3690	3.6847	66.3	111.2
2.4	26.245	-1.2820	1.3820	3.7378	67.0	113.2
2.5	29.288	-1.2870	1.3940	3.7868	67.6	115.1
2.6	32.612	-1.2930	1.4060	3.8320	68.2	116.8
2.7	36.232	-1.3000	1.4160	3.8737	68.7	118.4
2.8	40.168	-1.3060	1.4260	3.9122	69.2	119.9

**K = 0.3**

0.6	1.976	-1.5250	1.5060	1.8348	38.7	24.7
0.7	2.671	-1.4920	1.4610	2.0290	41.9	35.3
0.8	3.405	-1.4620	1.4250	2.2087	45.0	44.9
0.9	4.193	-1.4350	1.3980	2.3748	47.8	53.5
1.0	5.048	-1.4110	1.3790	2.5284	50.3	61.3
1.1	5.986	-1.3900	1.3670	2.6703	52.6	68.2
1.2	7.019	-1.3730	1.3610	2.8015	54.7	74.5
1.3	8.162	-1.3590	1.3600	2.9228	56.5	80.1
1.4	9.430	-1.3490	1.3630	3.0348	58.1	85.2
1.5	10.559	-1.3430	1.3670	3.1198	59.2	89.0
1.6	12.398	-1.3360	1.3760	3.2332	60.9	94.0
1.7	14.129	-1.3330	1.3860	3.3207	62.1	97.8
1.8	16.047	-1.3330	1.3950	3.4011	63.1	101.3
1.9	18.168	-1.3340	1.4050	3.4750	64.1	104.4
2.0	20.509	-1.3360	1.4150	3.5428	64.9	107.3

Tabla 5. (Continuación).

$\Lambda$	V	$\alpha$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$
2.1	23.087	-1.3390	1.4250	3.6051	65.7	110.0
2.2	25.919	-1.3430	1.4340	3.6624	66.5	112.4
2.3	29.023	-1.3470	1.4420	3.7150	67.1	114.7
2.4	32.418	-1.3520	1.4500	3.7634	67.7	116.8
2.5	36.122	-1.3570	1.4580	3.8081	68.3	118.7
2.6	40.154	-1.3620	1.4650	3.8493	68.8	120.5

**K = 0.2**

0.6	2.656	-1.5170	1.5160	1.9628	47.3	29.9
0.7	3.537	-1.4920	1.4920	2.1531	49.5	40.2
0.8	4.475	-1.4700	1.4750	2.3299	51.7	49.5
0.9	5.488	-1.4520	1.4620	2.4935	53.7	58.0
1.0	6.592	-1.4370	1.4550	2.6441	55.6	65.6
1.1	7.804	-1.4250	1.4510	2.7823	57.3	72.5
1.2	9.142	-1.4160	1.4500	2.9090	58.9	78.8
1.3	10.622	-1.4090	1.4520	3.0248	60.3	84.4
1.4	11.852	-1.4060	1.4540	3.1063	61.1	88.3
1.5	14.079	-1.4030	1.4600	3.2270	62.7	94.1
1.6	16.092	-1.4020	1.4650	3.3149	63.7	98.2
1.7	18.318	-1.4030	1.4710	3.3951	64.7	102.1
1.8	20.777	-1.4050	1.4760	3.4684	65.6	105.5
1.9	23.487	-1.4070	1.4820	3.5353	66.4	108.7
2.0	26.467	-1.4100	1.4870	3.5966	67.1	111.6
2.1	29.737	-1.4130	1.4920	3.6527	67.7	114.3
2.2	33.318	-1.4170	1.4960	3.7042	68.4	116.7
2.3	37.228	-1.4210	1.5010	3.7516	68.9	119.0
2.4	41.488	-1.4240	1.5050	3.7952	69.4	121.1

**K = 0.1**

0.6	4.105	-1.5210	1.5390	2.1990	58.7	39.9
0.7	5.274	-1.5100	1.5320	2.3761	59.9	49.5
0.8	6.536	-1.5000	1.5280	2.5398	61.1	58.3
0.9	7.909	-1.4930	1.5250	2.6899	62.3	66.3
1.0	9.416	-1.4880	1.5240	2.8270	63.4	73.5
1.1	11.076	-1.4840	1.5240	2.9517	64.5	80.1
1.2	12.910	-1.4820	1.5250	3.0649	65.4	86.0
1.3	14.938	-1.4820	1.5250	3.1681	65.6	91.4
1.4	17.182	-1.4810	1.5280	3.2605	67.2	96.2
1.5	19.662	-1.4810	1.5300	3.3449	67.9	100.6
1.6	22.400	-1.4820	1.5320	3.4216	68.6	104.6
1.7	25.418	-1.4840	1.5340	3.4914	69.3	108.2
1.8	28.737	-1.4860	1.5360	3.5550	69.9	111.6
1.9	32.379	-1.4880	1.5380	3.6132	70.4	114.6
2.0	36.365	-1.4900	1.5400	3.6664	70.9	117.4
2.1	40.719	-1.4920	1.5420	3.7153	71.4	120.0
2.2	45.462	-1.4940	1.5430	3.7603	71.8	122.3

## **7. ENSAYOS EN EL COHETE TEXUS-12**

## 7.1. INTRODUCCION

Dentro del proyecto "Columnas líquidas en ingravidez", se están realizando ensayos experimentales aprovechando la disponibilidad de diversas plataformas de microgravedad en vuelo parabólico con el avión KSC-135 de la NASA, en vuelo balístico con el cohete alemán TEXUS, y en vuelo orbital con el laboratorio Spacelab.

Los experimentos principales se vienen realizando en el Spacelab, con ayuda de un astronauta especialmente entrenado, usándose los ensayos en cohete para aclarar alguna etapa del experimento y mejorar así el rendimiento del trabajo en el Spacelab. Los escasos 20 segundos de baja gravedad obtenidos en vuelo parabólico con avión sirven más bien para comprobar el correcto funcionamiento de todos los equipos y tratar de asegurar el éxito en la etapa inicial del experimento, que suele ser causa de graves problemas.

El ensayo a bordo del cohete TEXUS-12 en 1985 era una repetición del intentado en 1984 en el TEXUS-10, que resultó fallido a causa de una sobrepresión en el depósito de líquido (debido a una entrada de calor inesperada desde el experimento adyacente) y que impidió el movimiento del motor que había de inyectar el líquido para formar la columna líquida.

El objetivo del experimento era determinar la velocidad máxima de inyección para la formación de una columna esbelta, como ya se explicó en el Informe Final de 1984 (Ref.: Lamf 8412) donde

también se hizo una descripción del aparato utilizado, la célula para columnas líquidas (Liquid Column Cell, LCC), de los ensayos de referencia realizados en tierra con dicho aparato, del modelo teórico elemental y de los resultados esperados.

## **7.2. RESULTADOS DEL VUELO**

Una vez efectuadas por el fabricante (ERNO, Alemania) las modificaciones pertinentes en el diseño, consistentes en disponer una pequeña cámara de expansión para compensar las dilataciones del líquido, aumentar la potencia del motor y disponer de una medida adicional de presión en la cámara del motor, el domingo 6 de Mayo de 1985 tuvo lugar el vuelo del cohete TEXUS-12, de 9 minutos de duración, de los cuales 6 fueron en trayectoria ballística, de ingravidez.

En esta ocasión, la disposición de equipos en el cohete fue la que se muestra en la Fig. 1, y el programa completo de actividades durante el vuelo el indicado en la Fig. 2.

El experimento tuvo un éxito completo, según fue comunicado a los experimentadores telefónicamente al día siguiente por el personal encargado de la recogida de los datos de telemida en tiempo real. Un mes después se recibieron dos copias de la película de 16 mm filmada a 20 imágenes por segundo durante el vuelo y un listado de las lecturas de los instrumentos a intervalos de un segundo.



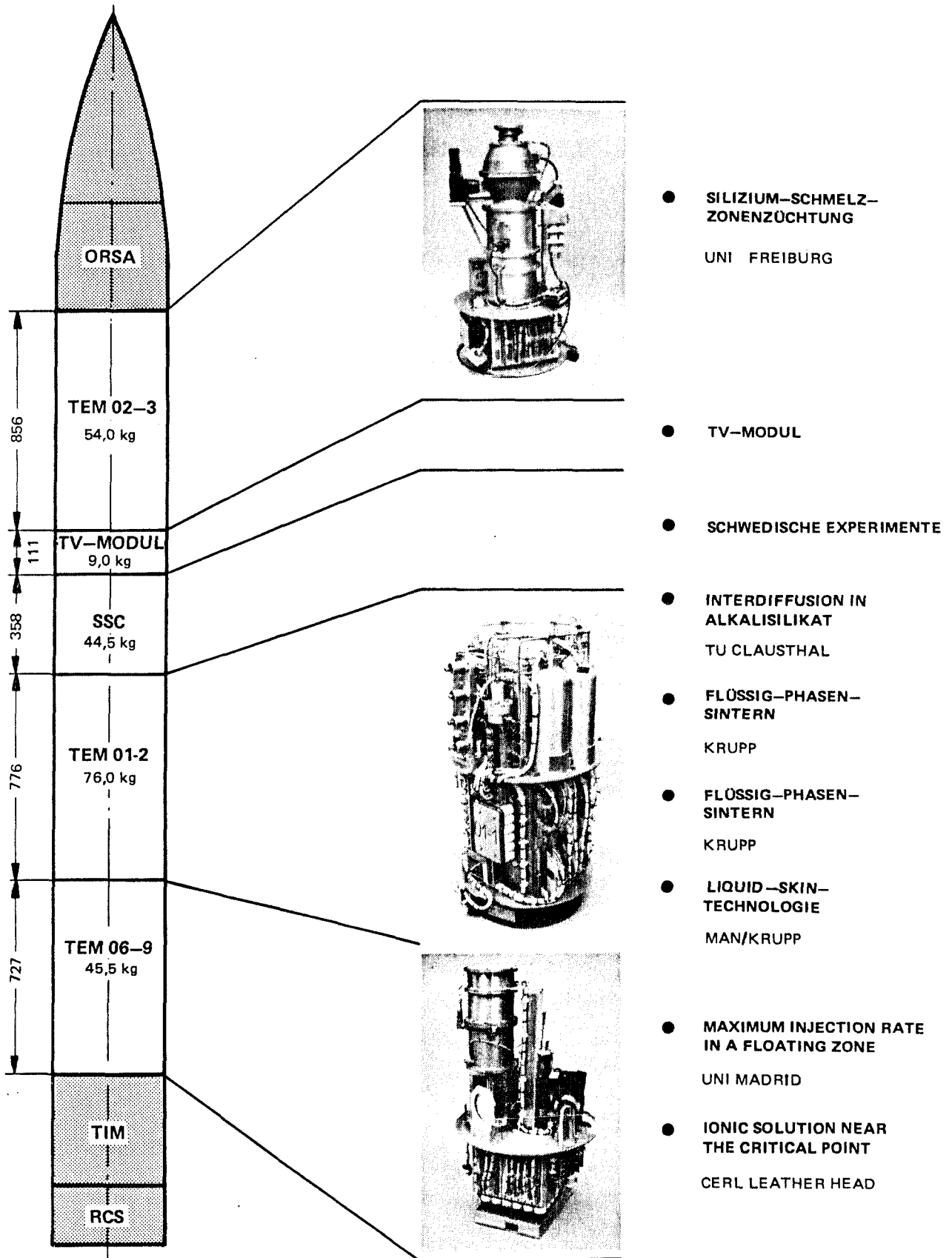


Abb. 2: Die Nutzlast TEXUS 12

Fig. 1. Emplazamiento de la célula para columnas líquidas (LCC) en el TEXUS-12.

Con presteza, se preparó un informe preliminar para su publicación en la revista ESA Journal (se adjunta una copia del artículo en el Apéndice 1) el cual sirvió de base a la presentación oficial de resultados de la campaña de lanzamientos TEXUS-11 y TEXUS-12, el 12 de septiembre de 1985 en el DFVLR (Colonia, Alemania).

Desde entonces, se está trabajando en el análisis cuantitativo de los datos obtenidos, en un programa que puede dividirse así:

- Comparar los datos transmitidos en tiempo real con los captadores eléctricos, las imágenes tomadas a bordo, y la secuencia nominal programada.
- Preparar para tratamiento por ordenador, las diferentes fuentes de información. En especial, digitalizar las imágenes.
- Ajustar los datos discretizados de la forma del puente líquido mediante funciones "suaves" que minimicen la incertidumbre.
- Obtener la secuencia de formas de la superficie libre, los perfiles de presión capilar y dar una aproximación para el campo de velocidades en el interior del líquido.

Las señales obtenidas en la telemedida, descritas en la Tabla 1, se muestran representadas en función del tiempo en la Fig. 3, reuniéndose en la Fig. 4 la señal de los acelerómetros de a bordo.

Tabla 1. Señales analógicas disponibles.

Canal	S e ñ a l	Rango	Conversión	Código
1	Voltaje de batería	0 a 50 V	10 V a 1 V	UBAM
2	Corriente total	0 a 10 A	2 A a 1 V	
3	Corriente del reloj	0 a 1 A	0,2 A a 1 V	MCLO
4	Corriente del convert.	0 a 2,5 A	0,5 A a 1 V	
5	Temperatura del amplif.	0 a 100°C	20°C a 1 V	
6	Corriente de la lámpara	0 a 10 A	2 A a 1 V	ILAM
7	Voltaje de la lámpara	0 a 50 V	10 V a 1 V	ULAM
8	Montoar del reloj	0 a 5 V	1 V a 1 V	
9	Corriente de la cámara	0 a 5 A	1 A a 1 V	IKAM
10	Temperatura del depósito	0 a 100°C	20°C a 1 V	TFLU
11	Temp. cámara de ensayos	0 a 100°C	20°C a 1 V	TZEL
12	Presión del depósito	0 a $5 \cdot 10^5$ Pa	$10^5$ Pa a 1 V	PZOM
13	Pres. cámara de ensayos	0 a $5 \cdot 10^5$ Pa	$10^5$ Pa a 1 V	PZEM
14	Voltaje del motor	0 a 50 V	10 V a 1 V	
15	Corriente del motor	0 a 5 A	1 A a 1 V	IMOT
16	Veloc. disco (selec.)	0 a 25 mm/s	5 mm/s a 1 V	MUS
17	Veloc. disco (actual)	0 a 25 mm/s	5 mm/s a 1 V	MUI
18	Posición del disco	0 a 100 mm	20 mm a 1 V	MEWG
19	Presión cámara del motor	0 a $5 \cdot 10^5$ Pa	$10^5$ Pa a 1 V	PMOM
20	Presión de verificación	0 a $10^4$ Pa	$2 \cdot 10^3$ Pa a 1 V	PVER

También se dispone de datos numéricos de las señales más importantes, tomadas cada segundo, pero no se ofrecen aquí ya que coinciden con los presentados en las figuras. Se observa que el punto de parada superior cambia lentamente al ir aumentando la velocidad de desplazamiento, posiblemente debido a la inercia del motor y a las partes móviles.

Las velocidades programadas y las obtenidas parecen concordar apreciablemente. En cuanto a la variación de la temperatura, entre 27 °C y 40 °C, podría ser un problema en experimentos que se suponen estrictamente isoterms. Las presiones registradas

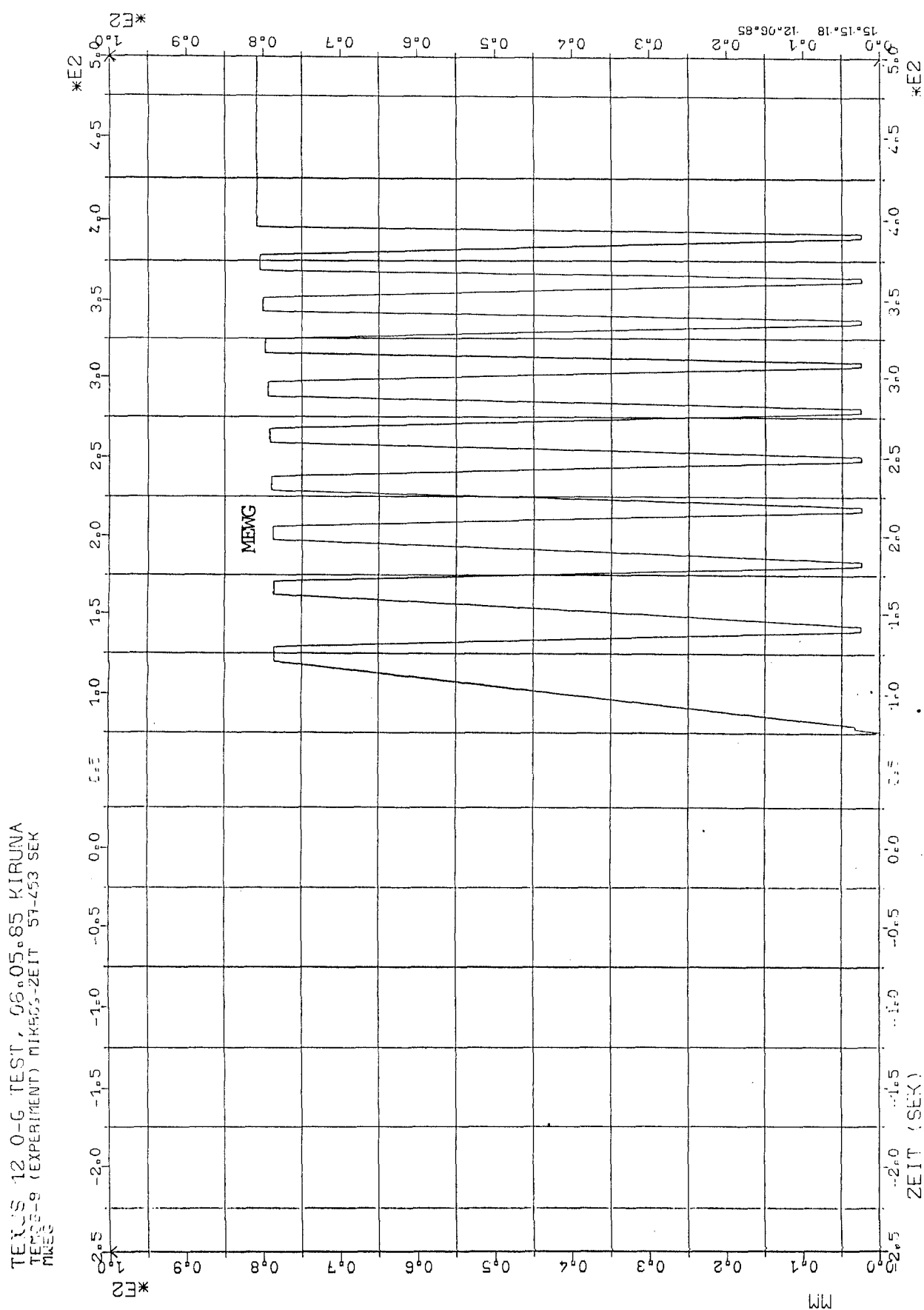


Fig. 3. Evolución temporal de las señales recibidas en directo durante el vuelo del TEXUS-12: MEWG=posición del disco, ILAM=intensidad lámpara, IKAM=intensidad cámara, MCLO=reloj, UBAM=voltaje batería, IMOT=intensidad motor, MUS=velocidad seleccionada, MUI=velocidad indicada, TFLU=temperatura depósito, TZEL=temperatura cámara de ensayos, PZEM=presión cámara de ensayos, PMOM=presión motor, PZOM=presión motor, PVER=presión verificación.

TEXUS 12 0-6 TEST, 06.05.85 KIRUNA  
TEM06-9 (EXPERIMENT) MIKROG-ZEIT 57-453 SEK  
ILAM ULAM MCLO IKAM  
--- 42-2 IKAM  
--- 42-1 ILAM  
--- 28-2 ULAM  
--- 29-2 MCLO

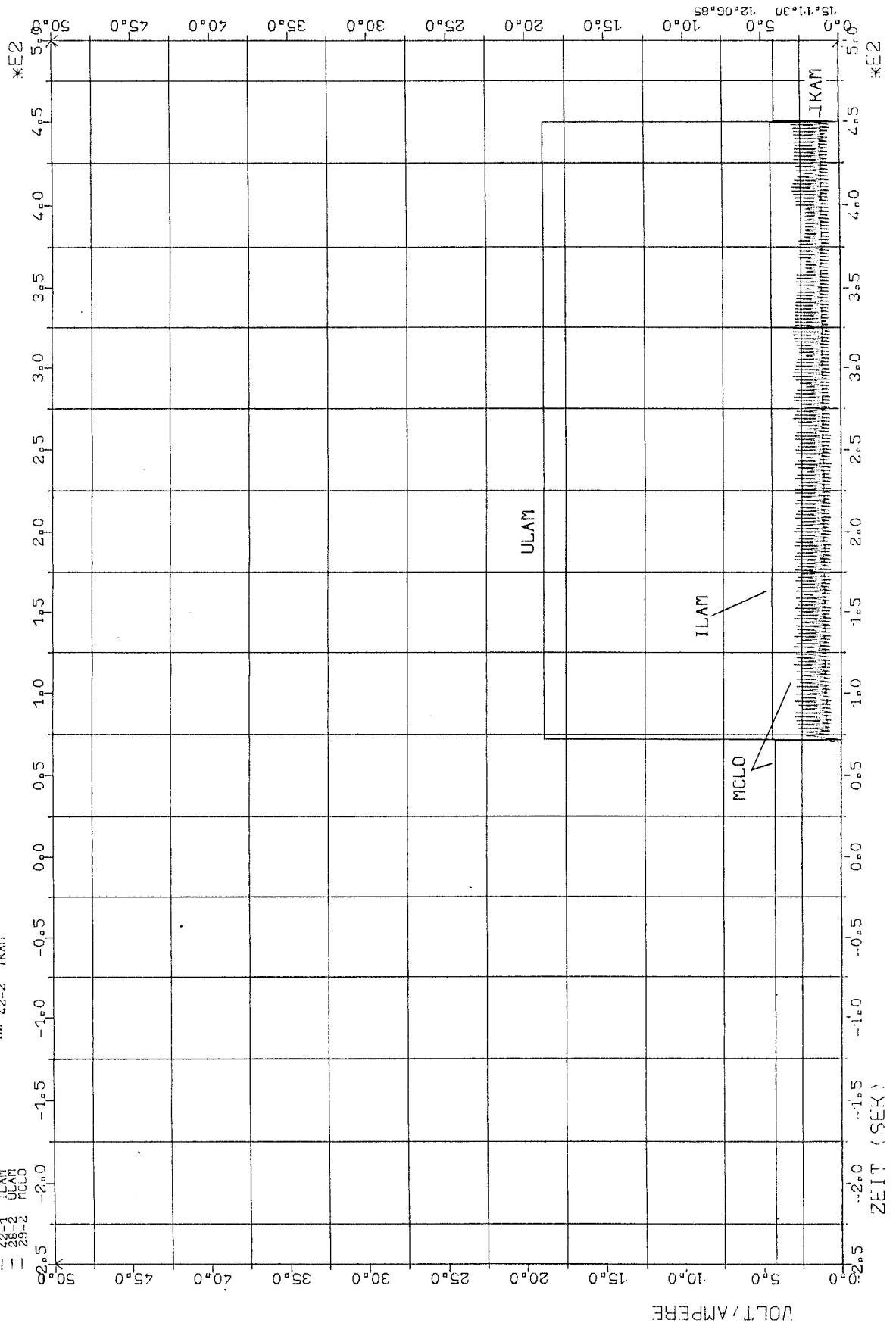


Fig. 3. (Continuación).

TEXUS 12 0-G TEST, 06.05.85 KIRUNA  
 TEM06-9 (EXPERIMENT) MIKROG-ZEIT 57-453 SEK  
 UBAM IMOT US MUI  
 - 29-4 UBAM  
 - 28-4 IMOT  
 - 28-5 MUS  
 .... 29-5 MUI

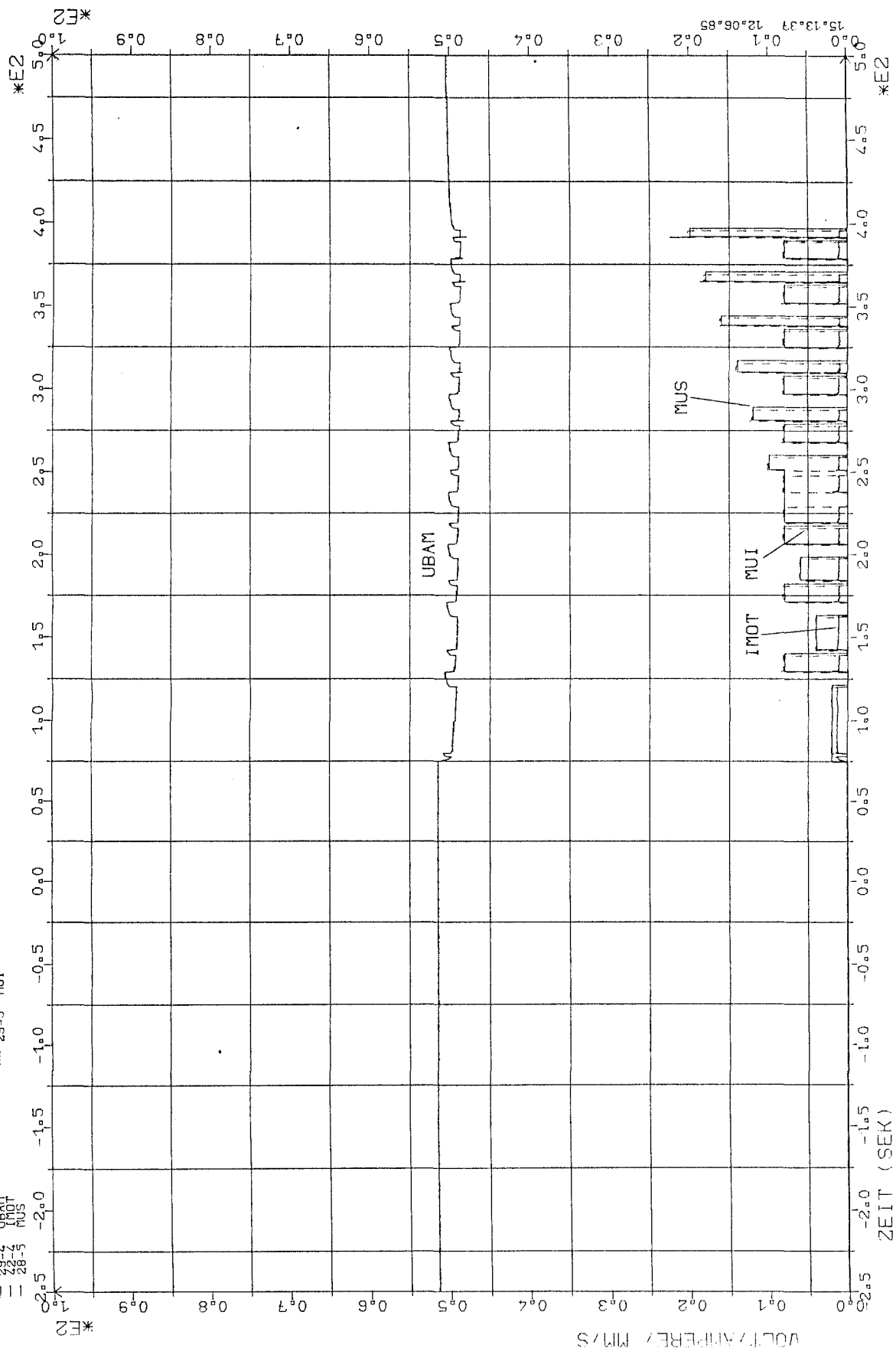


Fig. 3. (Continuación).

TEXUS 12 0-G TEST, 06.05.85 KIRUNA  
TEM06-9 (EXPERIMENT) MIKROG-ZEIT 57-453 SEK  
TFLU TZEL  
= 28-3 TFLU

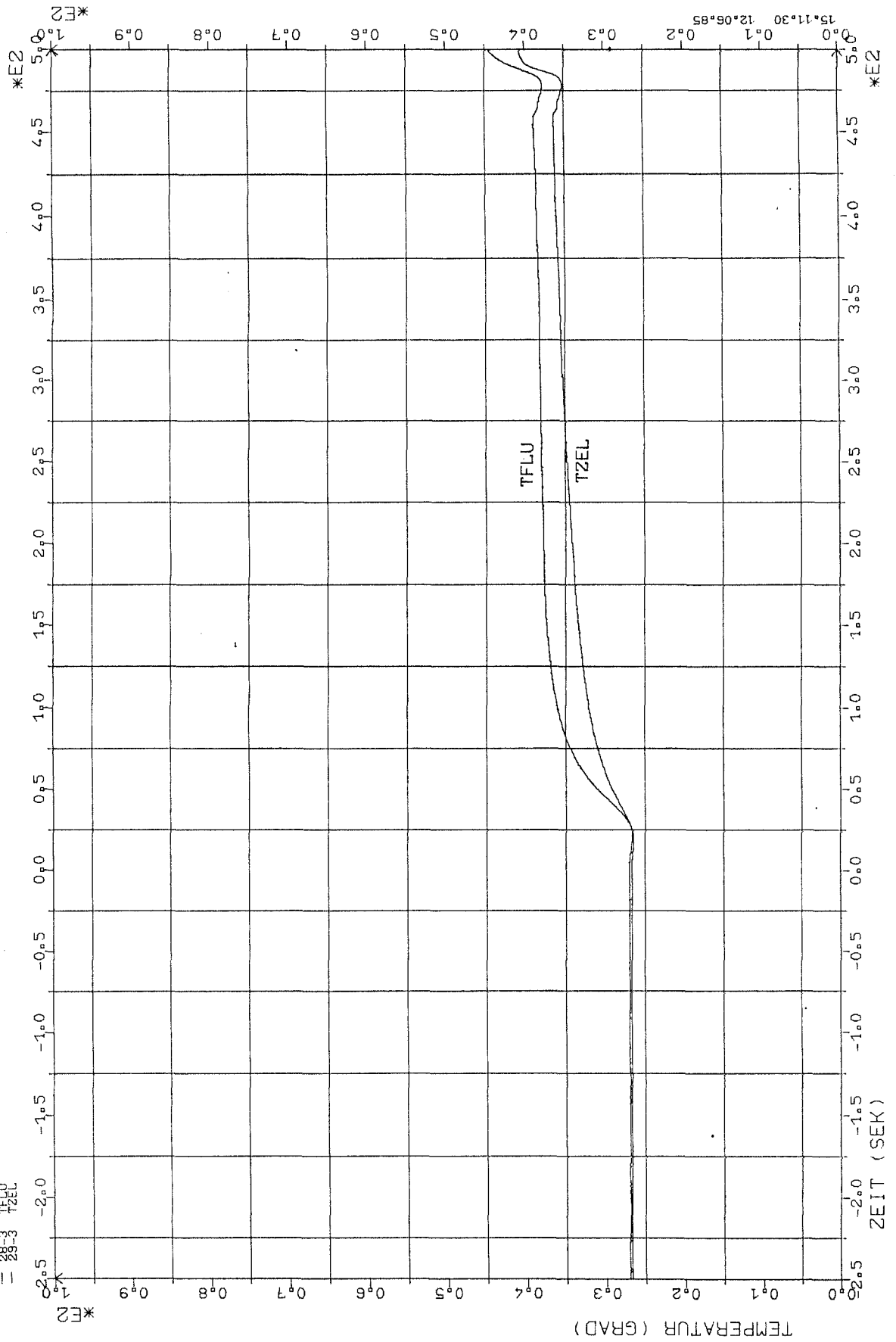


Fig. 3. (Continuación).

TEXUS 12 0-G TEST, 06.05.85 KIRUNA

TEM06-9 (EXPERIMENT) MIKROG-ZEIT 57-453 SEK

PZON PZEM PMOM PVER

--- 29-6 PVER

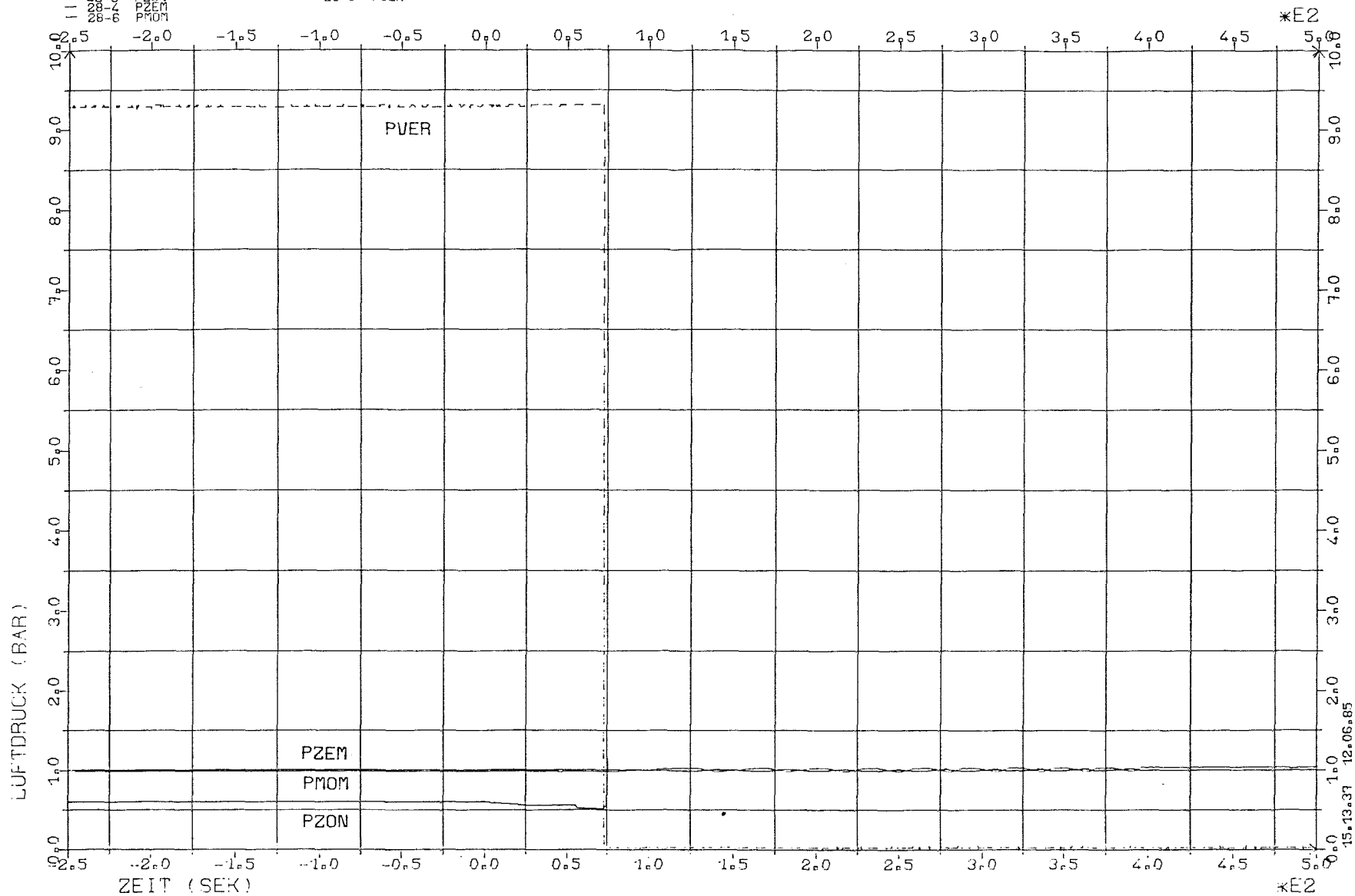


Fig. 3. (Continuación).



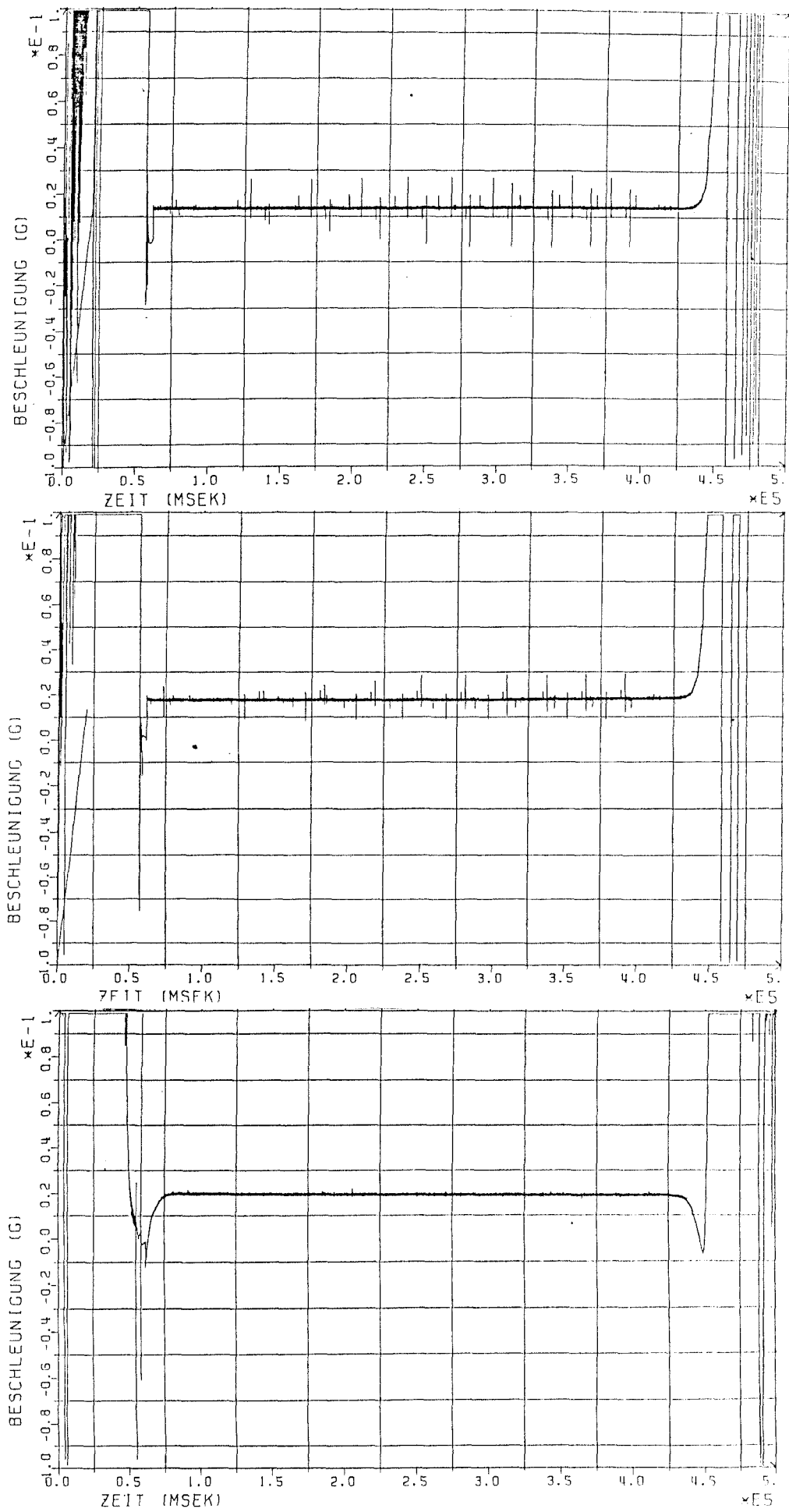


Fig. 4. Aceleraciones en cada uno de los tres ejes en función del tiempo, durante el vuelo del TEXUS-12.

indican que no se produjeron anomalías durante el experimento.

En el nivel de microgravedad se observan valores excesivamente altos, del orden de  $2 \times 10^{-2}$  g, en la dirección  $\{1,1,1\}$ , aunque esa coincidencia podría indicar que se trata de un error de puesta a cero del sistema de medida.

Estas anomalías detectadas en las señales eléctricas han aconsejado centrarse exclusivamente en los datos procedentes de la película tomada durante el experimento, cuyas imágenes son la base del proceso de análisis de resultados que se presenta a continuación.

En otro orden de cosas, aunque el excelente resultado del experimento ha sido recibido con gran entusiasmo por la comunidad científica, ya que es la primera vez que se consigue establecer en condiciones de microgravedad y según especificaciones un puente líquido de gran esbeltez y además el comportamiento del mismo ha mostrado una gran riqueza, que ofrece prometedoras perspectivas a los subsiguientes proyectos de investigación en la LCC, resulta que la elevada demanda de peticiones para experimentar en los cohetes TEXUS ha retrasado hasta una próxima selección la continuación de los experimentos con puentes líquidos materializada en la propuesta recogida en el Apéndice 2.

Afortunadamente, y debido a que la LCC no forma parte de la carga del próximo vuelo, la LCC va a ser cedida temporalmente

por la ESA a este laboratorio para que se pueda profundizar, con ensayos en tierra, en el estudio de los fenómenos revelados en los experimentos en microgravedad.

### 7.3. EVALUACION DE LOS RESULTADOS

Aunque el experimento constaba de 10 ciclos de inyección, esperándose la rotura a velocidades próximas a  $15 \text{ mm.s}^{-1}$ , en realidad se produjo en el tercer ciclo, a  $6 \text{ mm.s}^{-1}$  por lo que en lo siguiente sólo se analizarán los tres primeros ciclos.

En principio, la rotura podría no haber sido catastrófica, al haberse situado la gota mayor en el disco de inyección, de no ser por el movimiento recesivo del líquido hacia este disco, que produjo el desbordamiento del disco; la pérdida de líquido impidió que en los ciclos siguientes se formara el puente líquido.

Si el borde del disco hubiera podido soportar la onda de rotura el experimento hubiera continuado sin problemas hasta llegar a ciclos de velocidad bastante mayor, en los que la rotura se produce por estrangulamiento cerca del disco de inyección, y este tipo de rotura sí que de ninguna forma hubieran podido ser recuperables en la presente configuración.

El análisis de los resultados relativos a los tres ciclos útiles se ha separado en dos partes, una primera dedicada a caracterís-

ticas globales (variación de la magnitud y posición de las deformaciones máxima y mínima en función del tiempo) y una segunda de análisis de las formas de la entrefase en las diversas partes de cada ciclo de inyección (deformaciones, distribuciones de presión y campo de velocidades, y sus variaciones temporales).

### 7.3.1. Análisis de las características globales

En la Fig. 4 del Apéndice 1 se muestran fotografías extraídas de la película del experimento en vuelo en la posición de arranque y de parada de la inyección en los tres ciclos considerados, así como el proceso de rotura en el punto superior del tercer ciclo.

En la Fig. 5 se presenta la variación con el tiempo de la esbeltez del puente líquido, las deformaciones máxima y mínima, así como los valores de la coordenada axial correspondientes a dichas deformaciones.

En el primer ciclo, durante la inyección, la columna líquida se comportó como era esperado. La entrefase permaneció cilíndrica y únicamente cerca de la separación máxima empezó a producirse una deformación de la entrefase, ensanchándose cerca del disco fijo y estrechándose cerca del otro.

Después de la parada en el punto superior, se produjo un movimiento de oscilación, de 11 s de periodo, muy aproximado al

correspondiente a una onda estacionaria, como lo muestra que la posición del máximo y el mínimo de la deformación permaneciera casi fija.

Como las frecuencias propias son función de la esbeltez, durante la extracción, el período de las ondas se va reduciendo considerablemente.

Con objeto de distinguir las diferentes ondas y poder definirlas con precisión, se ha realizado un exhaustivo muestreo temporal que se ha incrementado en las zonas donde aparecen las mayores variaciones de la posición del máximo y el mínimo de la deformación. Los puntos de muestreo están indicados por las marcas situadas en el eje horizontal de la Fig. 5.

En el segundo ciclo, durante la inyección, la columna creció cilíndrica, con ligeras deformaciones, incluso hasta la llegada al punto superior, y a partir de ese momento se produjo una onda cuyo mínimo estaba situado cerca del disco fijo, posición contraria a la esperada. Las pequeñas deformaciones, con componentes axilsimétricas, tendrían que ser combinación de diversos modos de deformación que, en la oscilación están asociados a frecuencias temporales altas.

La onda que empezó a distinguirse después de la parada tiene un período muy próximo a la del primer ciclo, lo que es lógico tratándose del mismo modo de oscilación aunque las formas iniciales se encuentren desfasadas.

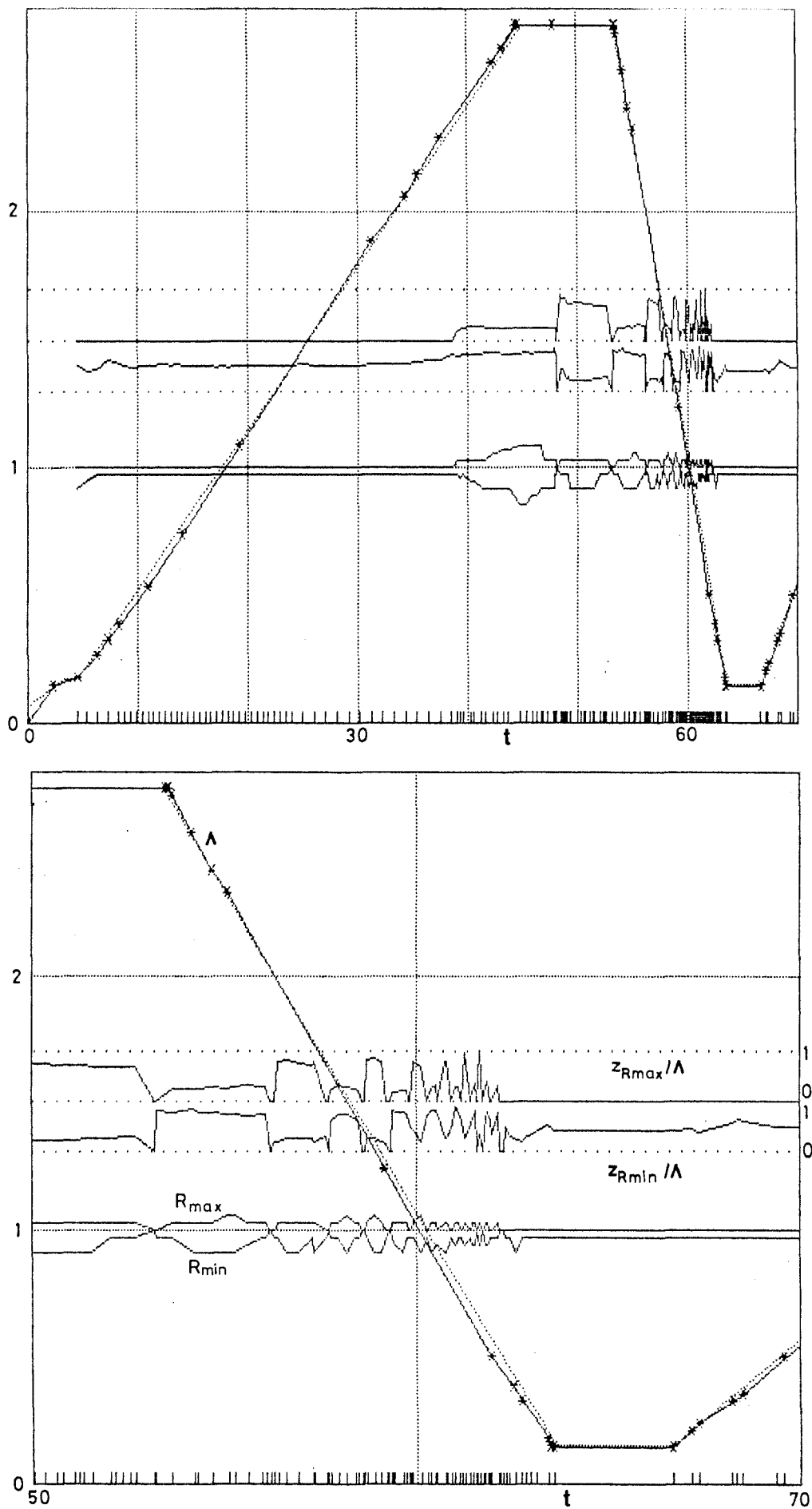


Fig. 5. Variación con el tiempo  $t$  (en seg.) de las diferentes magnitudes características medidas en las imágenes.  $\Lambda$ , esbeltez de la zona: línea continua, medida en las imágenes, línea de puntos, señal eléctrica corregida.  $R_{\max}$  y  $R_{\min}$ , deformaciones máxima y mínima.  $z_{R\max}$  y  $z_{R\min}$ , posición axial de las anteriores. Las marcas en el eje del tiempo y los asteriscos sobre la curva  $\Lambda(t)$  indican las posiciones de muestreo.

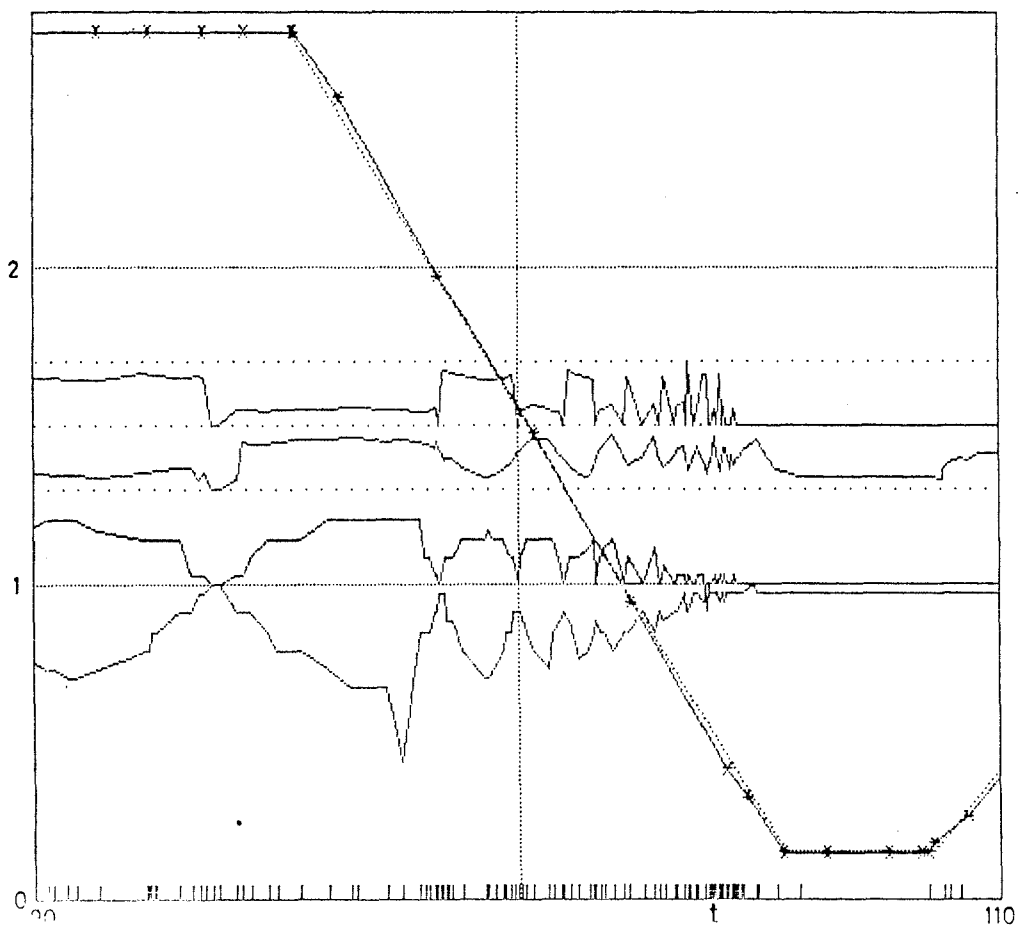
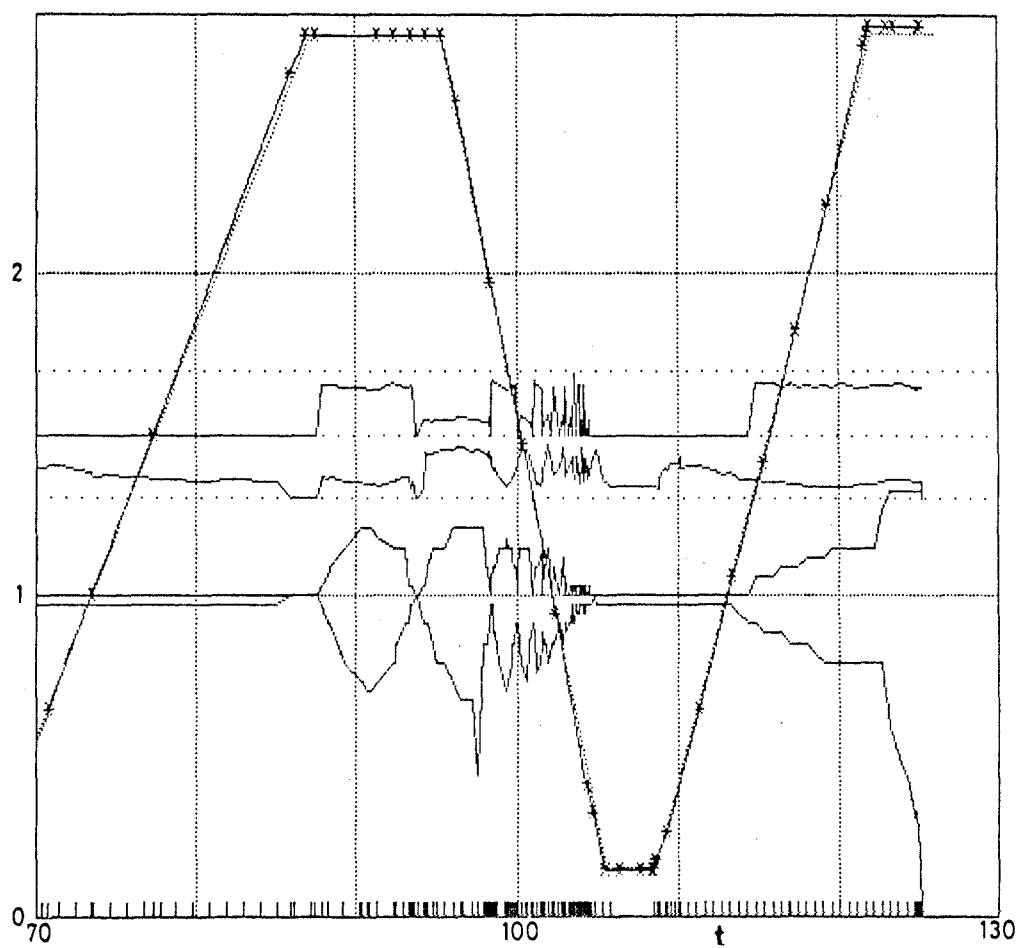


Fig. 5 (Continuación)

La amplitud de la deformación en el segundo semiperíodo de la oscilación, ya en la etapa de recogida, es mayor que la del primero, probablemente debido a una interferencia constructiva entre las ondas generadas en la parada y en el arranque posterior, así como a encontrarse cerca de la máxima deformación cuando la esbeltez comenzó a disminuir.

En el ciclo anterior las ondas que se producen en la recogida presentan una deformación con dos semiondas, pero en el segundo ciclo, en la parte final aparece una onda reflejada en el disco que le da la apariencia de deformación en tres semiondas, pero no es tal debido a la variación con el tiempo de la posición de los máximos y mínimos (intervalo de variación suave de  $z_{Rmin}$  para  $\Lambda < 2$  en la Fig. 5).

En el tercer ciclo, durante la inyección, la columna desarrolló un estrangulamiento creciente en la zona próxima al disco fijo, frenado por unos instantes al acercarse el disco de inyección al punto superior pero que creció abruptamente hasta producir la rotura, formándose la gota mayor en el disco de inyección. Como se ha comentado antes, si las gotas producidas en la rotura hubiesen permanecido ancladas al borde de los discos, con la configuración obtenida en la rotura podría haberse restablecido el puente a partir de las gotas.

Desgraciadamente, la inercia del líquido en su movimiento recesivo hacia el disco de inyección hizo que el ángulo de contacto en el borde del disco ( $\approx 160^\circ$ ) rebasase el ángulo de



mojado en la superficie lateral del disco (unos  $145^{\circ}$  respecto a la cara del disco) avanzando la línea triple por la superficie lateral y desparramándose el líquido por ella. En los ensayos en flotabilidad neutra efectuados en tierra, el movimiento recesivo del líquido no es tan violento ya que parte de la energía liberada en la rotura es absorbida por el líquido del baño.

Debido a la pérdida de líquido (la casi totalidad de la gota mayor) en los ciclos siguientes llegó a introducirse aire en el depósito, formándose una emulsión cuya posterior evolución y estudio, aunque de gran interés, se sale de los objetivos del presente trabajo.

En la evolución de la amplitud de la deformación pueden distinguirse dos regímenes. En el primero la amplitud crece hasta alcanzar un cierto valor, como ocurre en el primer ciclo (aunque en ese caso con la deformación invertida). En el segundo, la onda producida en la parada tiende a llevar el fluido hacia el disco de inyección, como en los casos anteriores, por lo que a la deformación adquirida durante el desplazamiento hay que añadir el efecto de la parada, produciendo el comienzo de la evolución hacia la rotura, caracterizado por una rápida variación de la deformación.

Entre ambos regímenes existe un intervalo en el que la amplitud de la deformación permanece casi constante.

También en la Fig. 5. puede observarse la aproximación entre los

valores de la esbeltez proporcionados por el sistema de adquisición de datos y los medidos en las fotografías, si bien los primeros han debido ser transformados mediante una corrección lineal que ajustase los valores máximo y mínimo de la esbeltez.

En cuanto a los errores estimados en el proceso de digitalización de las imágenes, la posición de la entrefase medida contra la rejilla de referencia da un error de  $\pm 0.5$  mm (3 % relativo al radio), siendo difícil de reducir debido a la pobre definición de la copia de la película. El efecto se acusa en la forma escalonada de las curvas de la Fig. 5. En la señal eléctrica, aunque el error nominal es de 0.1 mm, al estar calibrada con referencia a las medidas visuales, ambas tendrían el mismo error.

En cuanto al tiempo, en la película se obtiene una medida con error de 0.01 s mientras que en la señal eléctrica es de 0.5 s, al ser la frecuencia de muestreo de 1 Hz.

En cuanto a resultados experimentales que se puedan comparar con los teóricos disponibles, hay que considerar la frecuencia de las oscilaciones a esbeltez constante. Para esbeltez  $\Lambda = 2.73$  la pulsación adimensional teórica (modelo tridimensional lineal no viscoso) es  $\omega = 0.25$ . La misma cantidad medida a partir de los primeros semiperíodos de la primera oscilación de los ciclos primero y segundo es 0.25 y 0.21 respectivamente. Para adimensionalizar los periodos se emplea como tiempo característico  $(\rho R^3/\sigma)^{1/2}$ . Este modelo se puede encontrar en Sanz, 1985.

### 7.3.2. Análisis de las formas

El proceso de análisis de las formas de la entrefase tiene por objeto tratar de identificar las acciones a que se ve sometido el fluido de la zona debido a las deformaciones de la entrefase o viceversa. Consiste en determinar los gradientes de presión y el campo de velocidades a partir de las deformaciones de la entrefase medidas en la secuencia de imágenes tomadas.

Los resultados que se comentan a continuación pertenecen a un estudio preliminar destinado a poner a punto un sistema de análisis de formas apropiado a las características específicas de las deformaciones de una entrefase.

Las imágenes elegidas, cuya posición en la secuencia temporal se muestra en la Fig. 6 y cuyas características se recogen en la Tabla 2, se han dividido en tres grupos: el primero contiene las del primer ciclo y los dos restantes corresponden a las dos fases del tercer ciclo de inyección.

En las Figs. 7 a 9 se muestran las formas de las entrefases medidas en los fotogramas de la película, ampliados previamente. Las irregularidades se deben a errores de medida que en estos gráficos aparecen ampliados. También se muestran los gradientes de presión en la entrefase calculados a partir de las formas discretizadas siguiendo el método expuesto en el Apéndice 3.

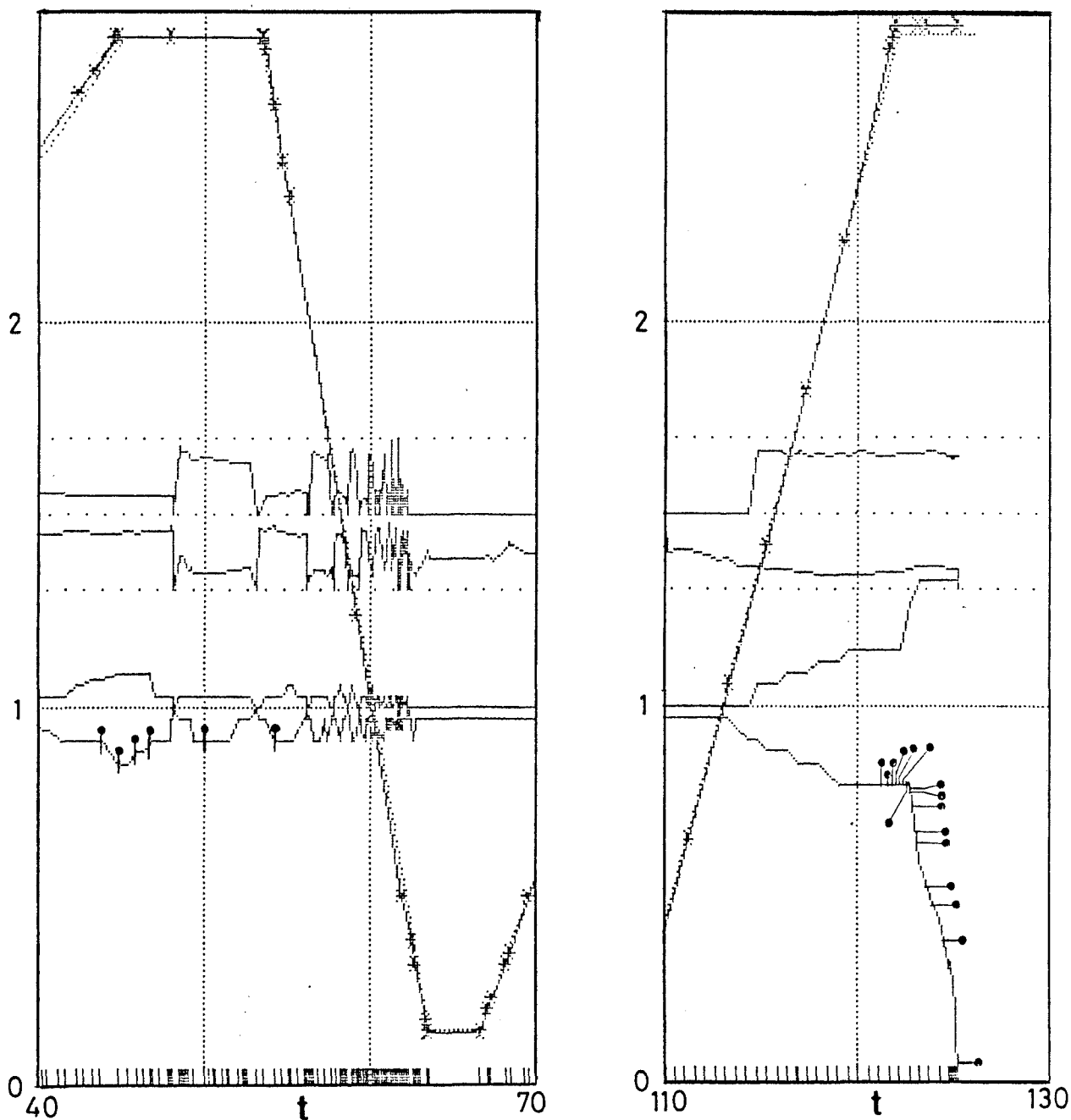


Fig. 6. Posición en la secuencia temporal de las imágenes discretizadas: a) imágenes del primer ciclo (grupo 1), b) imágenes del tercer ciclo, las seis primeras del grupo 2 y las siguientes del 3. Símbolos en Fig. 5.

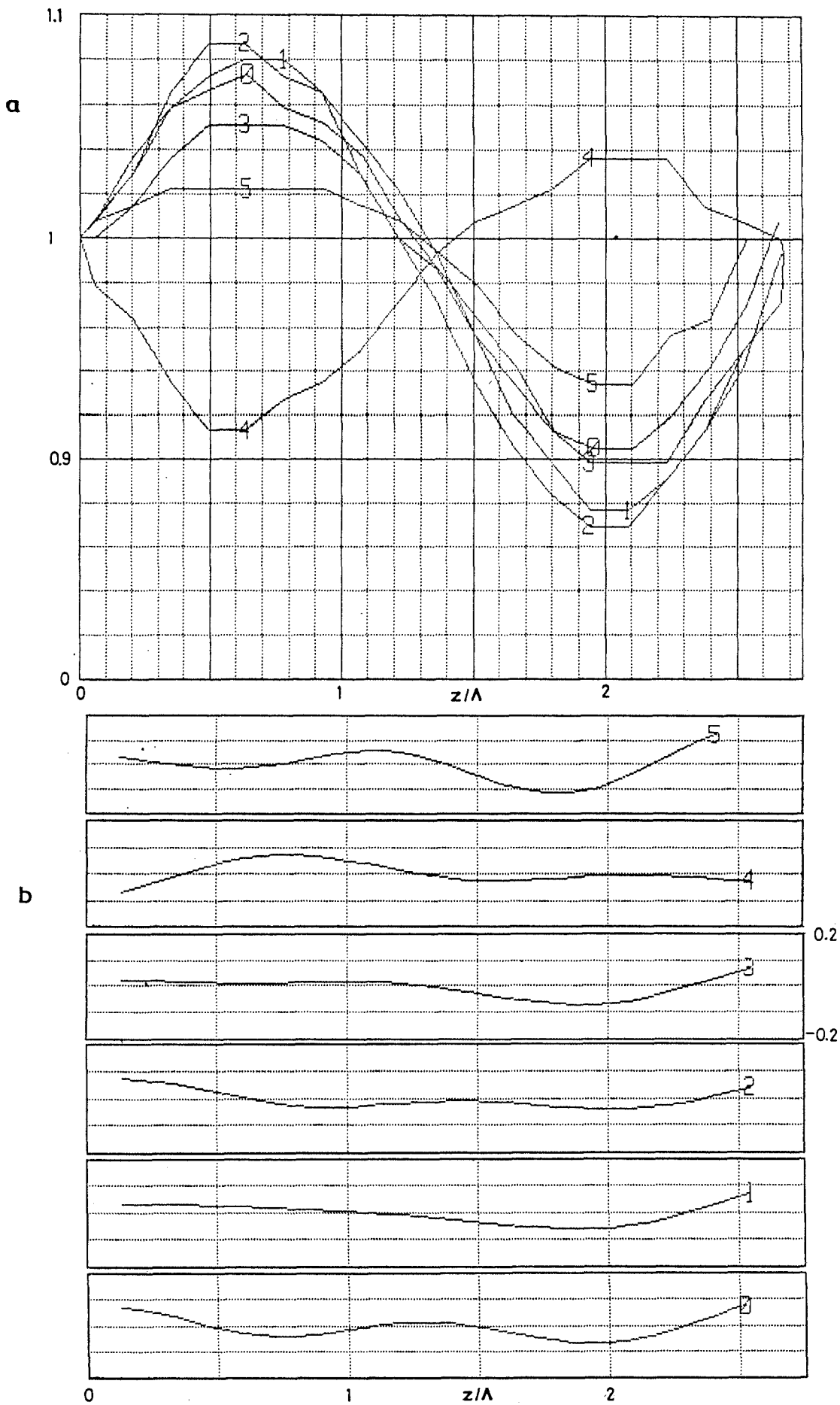


Fig. 7. a) forma de la entrefase y b) gradiente de presiones (adimensional) determinado experimentalmente a partir de diversas imágenes pertenecientes al primer ciclo de inyección (grupo 1). El tiempo de las imágenes (en segundos) es: #0, 43.79; #1, 44.83; #2, 45.88; #3, 46.77; #4, 50.01; #5, 54.19. La #4 está en oposición de fase a los anteriores. La parada se produce para  $t=44.75$  s.  $z$ , coordenada axial;  $\Lambda$ , esbeltez de la zona.

esbeltez de la zona.

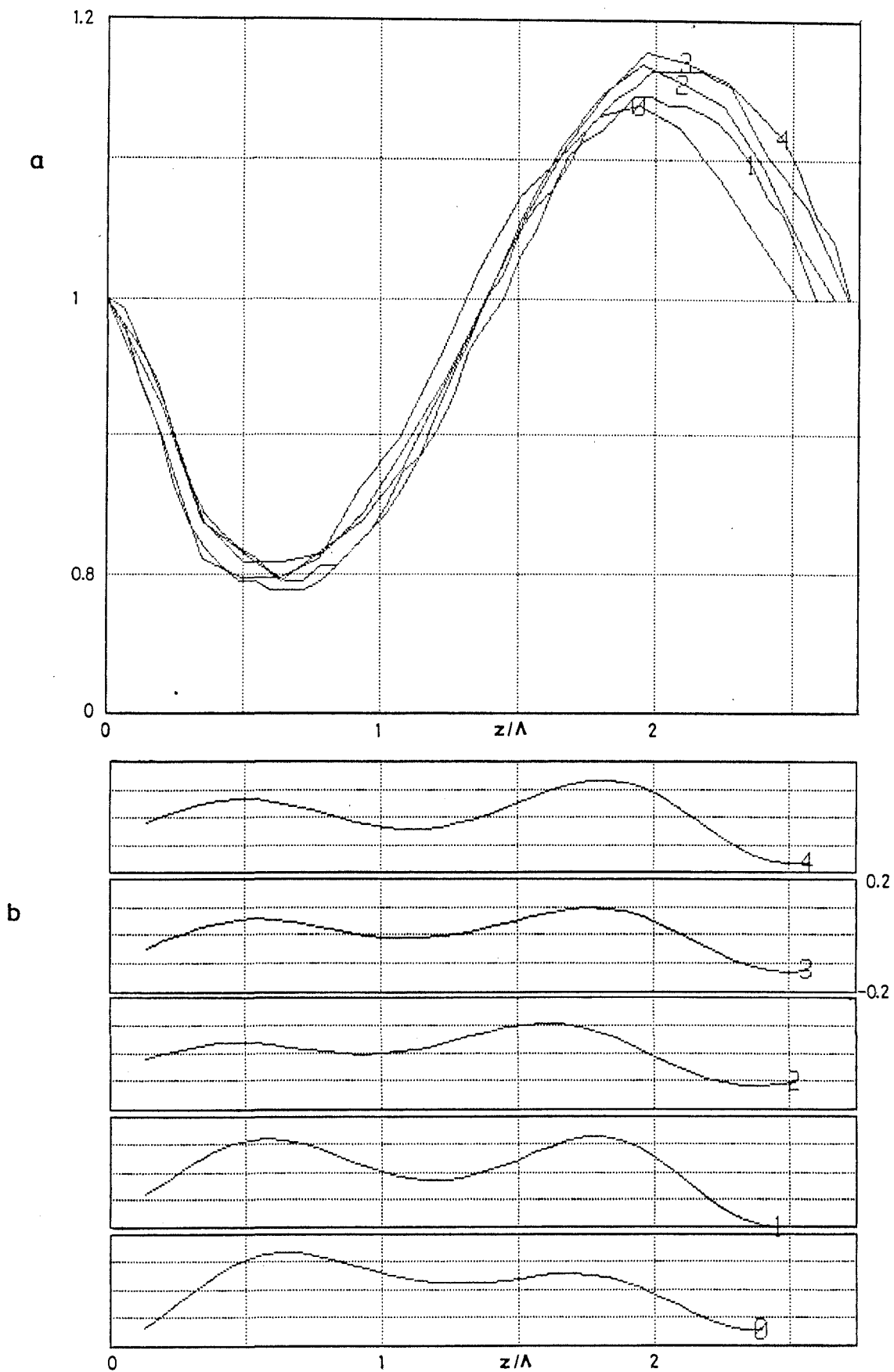


Fig. 8. a) forma de la interfase y b) gradiente de presiones (adimensional) determinado experimentalmente a partir de diversas imágenes pertenecientes al tercer ciclo de inyección (grupo 2). El tiempo de las imágenes es: #0, 121.14; #1, 121.66; #2, 121.76; #3, 121.92; #4, 122.13. La parada se produce para  $t=121.92$  s.  $z$ , coordenada axial;  $\Lambda$ , esbeltez de la zona.

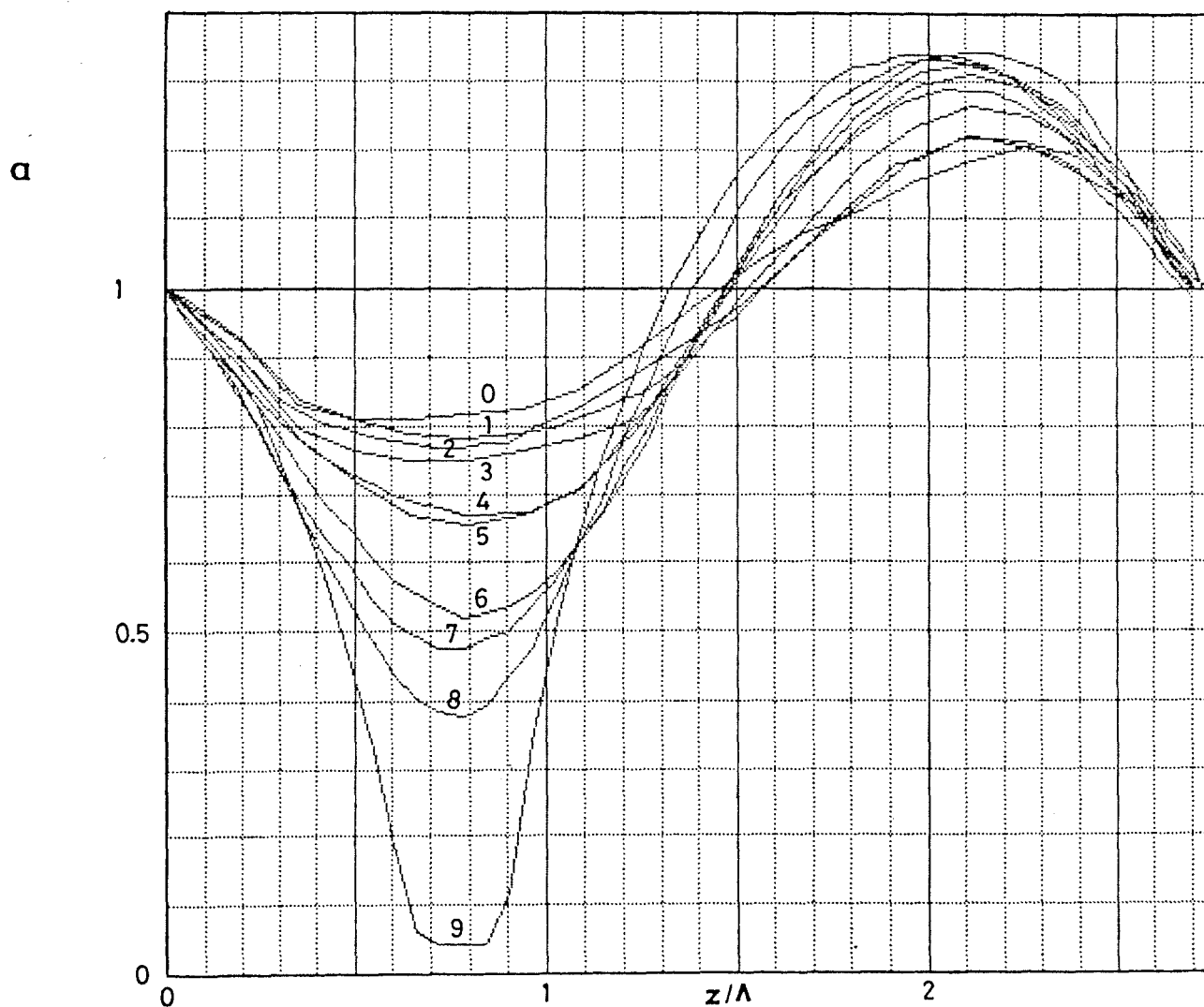


Fig. 9. a) Forma de la interfase y b) gradiente de presiones (adimensional) determinado experimentalmente a partir de diversas imágenes pertenecientes al tercer ciclo de inyección (grupo 3). El tiempo de las imágenes es: #0, 122.33; #1, 122.55; #2, 122.60; #3, 122.81; #4, 123.12; #5, 123.17; #6, 123.6; #7, 124.12; #8, 124.64.  $z$ , coordenada axial;  $\Lambda$ , esbeltez de la zona.

b

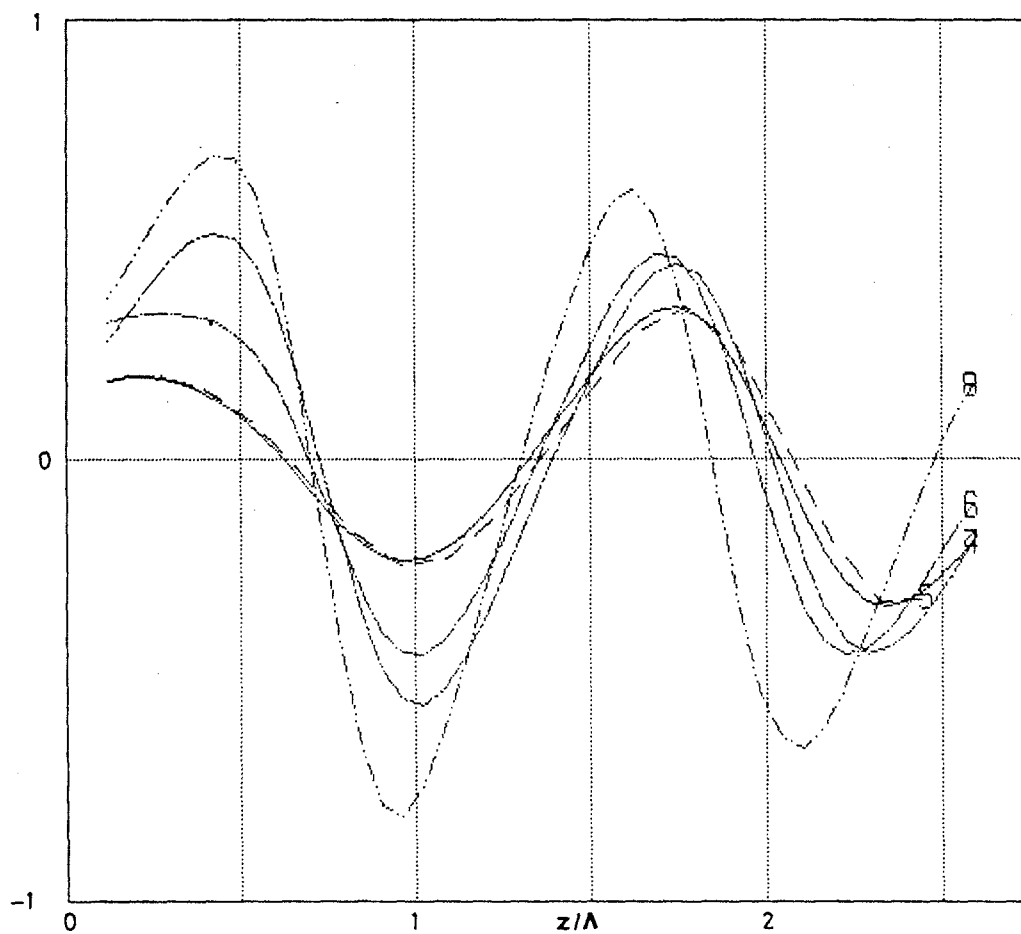
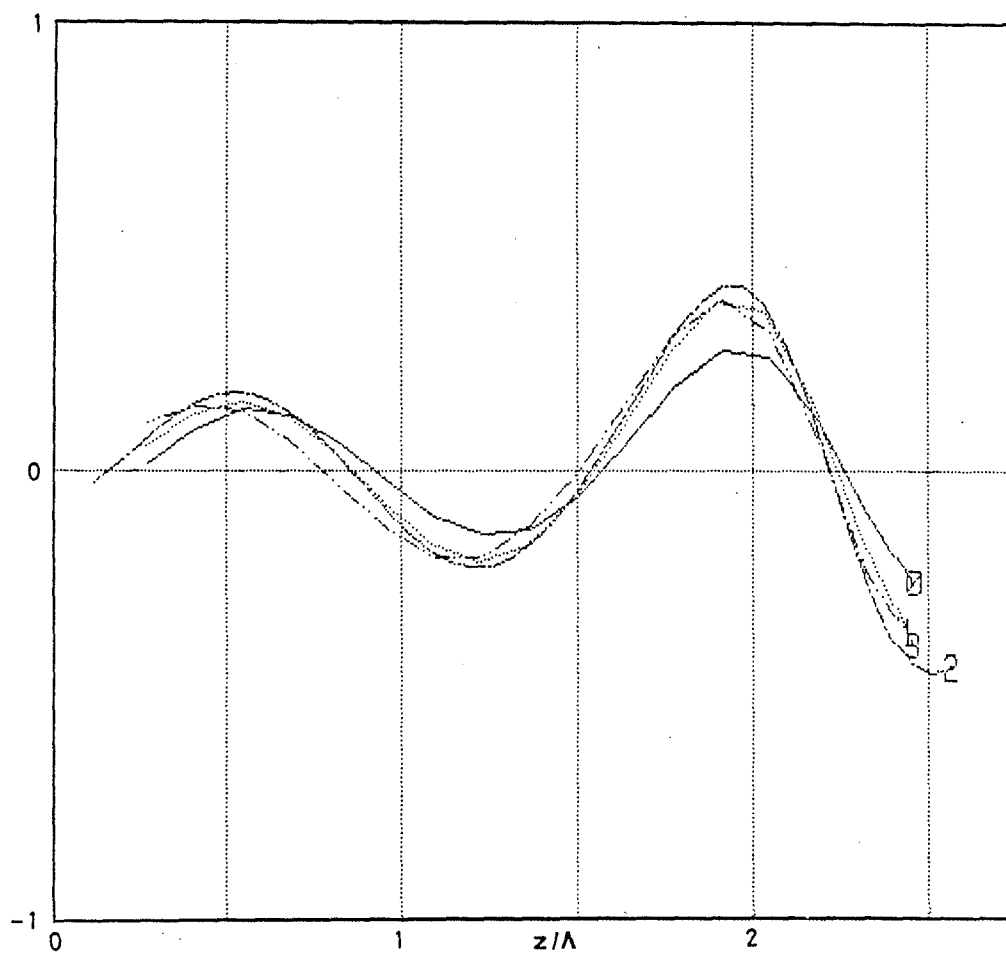


Fig. 9 (Continuación)



Tabla 2. Características de las curvas extraídas de las imágenes de la película del experimento en el TEXUS-12. # Número de la curva; t, tiempo en segundos; N, número de puntos discretizados;  $\Lambda$ , esbeltez de la zona.

Grupo 1				Grupo 2				Grupo 3			
#	t	N	$\Lambda$	#	t	N	$\Lambda$	#	t	N	$\Lambda$
0	43.79	19	2.66	0	121.14	18	2.52	0	122.33	20	2.74
1	44.83	20	2.68	1	121.66	43	2.59	1	122.55	20	2.72
2	45.88	20	2.68	2	121.76	19	2.66	2	122.60	45	2.69
3	46.77	20	2.68	3	121.92	19	2.71	3	122.81	20	2.74
4	50.01	20	2.68	4	122.13	45	2.71	4	123.12	45	2.71
5	54.19	18	2.54					5	123.17	20	2.74
								6	123.60	45	2.71
								7	124.12	45	2.71
								8	124.64	45	2.71
								9	125.12	45	2.71

El gradiente de presión se calcula a partir de la distribución de presión, que en la entrefase es proporcional a su curvatura. El estado actual del cálculo de las curvaturas sólo permite determinar tendencias cualitativas, dada la gran influencia en los valores cuantitativos del método de ajuste empleado. En el Apéndice 3 se ofrece un estudio preliminar de esta influencia y aunque se han obtenido resultados prometedores, la completa validación del método exige una serie exhaustiva de comproba-

ciones que está en curso de realización en la actualidad.

La distribución del gradiente de presión indica las regiones donde el fluido se acelera o decelera (en el sentido positivo de los ejes) y la evolución de los máximos y mínimos da una idea aproximada (siempre que la curva corte al eje horizontal entre cada dos extremos relativos) de la variación de dichas regiones.

En la Fig. 7 puede apreciarse que el gradiente de presiones justo después de la parada (#1) difiere del inmediato anterior (#0) perteneciente a un instante de la carrera de inyección. El campo de presiones evoluciona siguiendo la oscilación que se produce después de la parada; así, la curva #4 es antisimétrica de la #3 como corresponde a su oposición de fase en la oscilación.

En la Fig. 8 se muestran los resultados correspondientes al grupo 2. Como estas deformaciones son simétricas de las del grupo 1 (excepto la #4) respecto al plano medio, la distribución de presión también lo será y, por tanto, sus derivadas serán antisimétricas de las del grupo 1, presentando dos máximos y un mínimo en el grupo 2 y a la inversa en el grupo 1.

Durante la inyección, el máximo próximo al disco móvil crece hasta superar al otro, situado próximo al disco fijo. Después de la parada (#3) ambos máximos crecen, aunque más rápidamente el más próximo al disco de inyección. El crecimiento continua en las primeras imágenes del grupo 3 (#0 a #5), aunque de una forma

lenta, de acuerdo con lo comentado antes referente al intervalo que separan el régimen inicial del de rotura.

A partir de la #6 se acentúa el crecimiento del máximo próximo al disco fijo, que sobrepasa al otro. Cerca de la rotura (#6 a #8), en la región próxima al cuello aparecen dos zonas, una a la derecha donde el fluido se acelera hacia el disco de inyección y lo contrario en la otra. Estas aceleraciones, indicadas por el valor del máximo y el mínimo, aumentan con el tiempo.

No se ha presentado la curvatura de la #9 porque, debido a la gran deformación de la entrefase, el tratamiento numérico elegido resulta inapropiado.

Las ecuaciones del movimiento (en un líquido no viscoso) exigen que el gradiente de presiones sea nulo en los discos, lo que no se produce en los casos presentados. Esta característica puede servir para comprobar la efectividad de las modificaciones que necesita el tratamiento de datos.

En la Fig. 10 se muestran los resultados obtenidos en el cálculo del campo de velocidades haciendo uso de un modelo de movimiento fluido unidimensional como se detalla en el Apéndice 3 (Mesequer, 1983).

En este modelo se considera que la velocidad axial es constante en cada sección de la zona por lo que sólo puede emplearse cuando el disco de inyección está parado, al no poder retener los

a

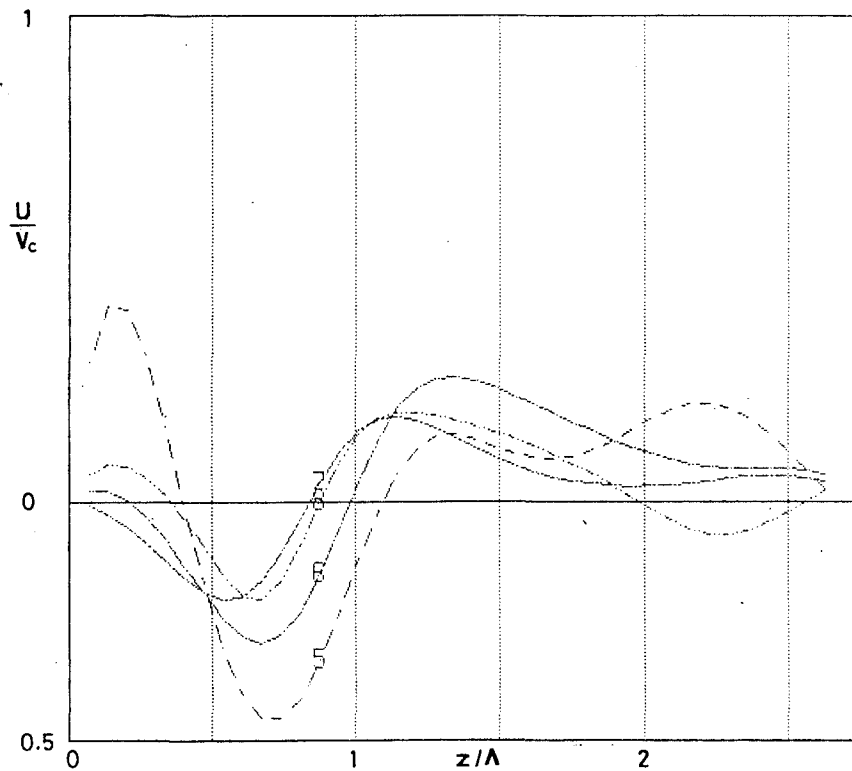
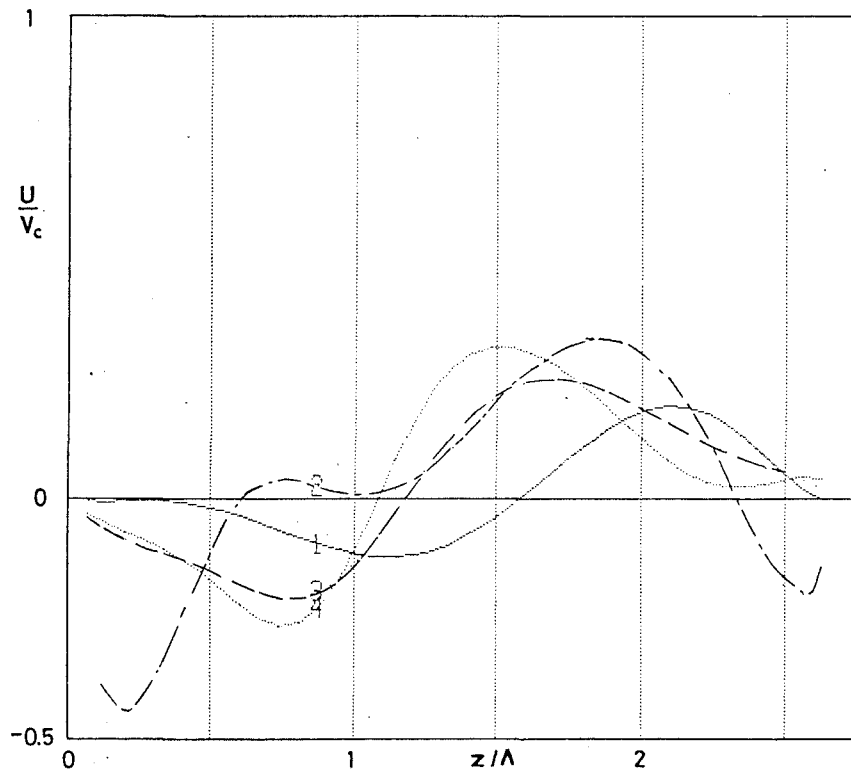
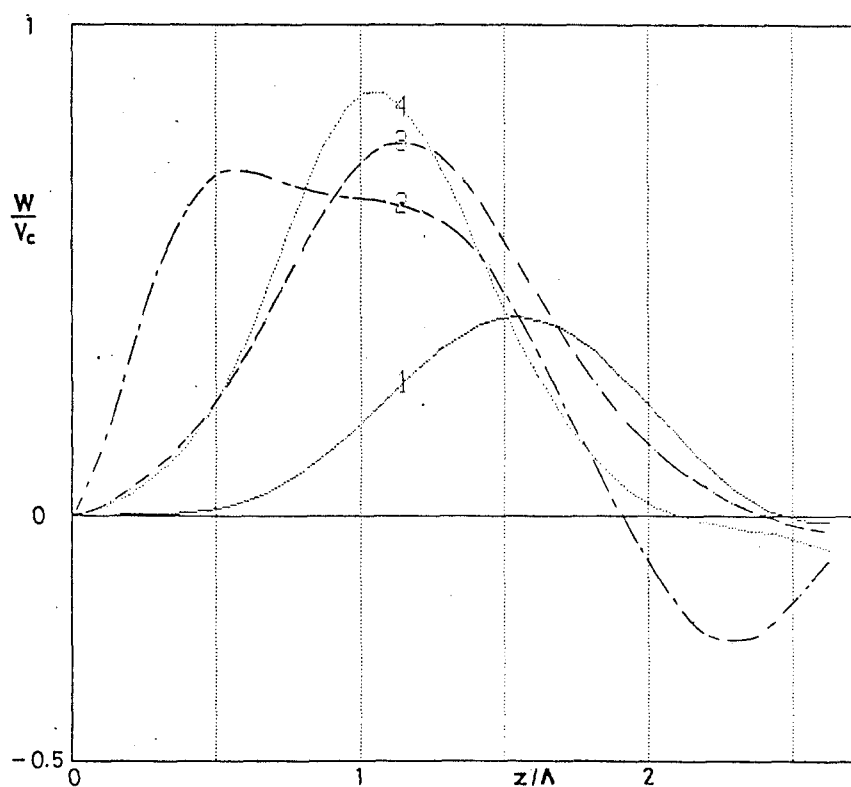


Fig. 10. Componentes a) radial,  $U$  y b) axial,  $W$  de la velocidad en la entrefase, obtenidas a partir de los datos experimentales de las formas presentadas en la Fig. 9, mediante el modelo unidimensional.  $V_c$  es la velocidad característica.



b

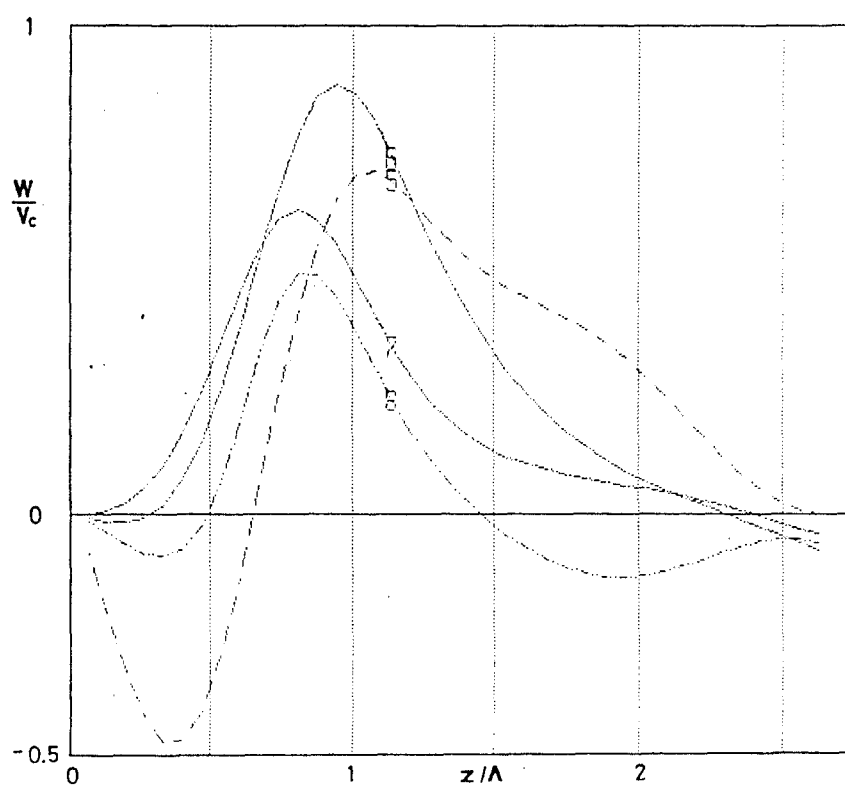


Fig. 10 (Continuación)

efectos de la inyección, que llevan asociado una no uniformidad radial de la velocidad axial. Por ello, sólo es aplicable al caso de que  $\Lambda = \text{cte.}$  En este estudio se han tratado las imágenes del grupo 3 porque contienen el proceso de rotura y parecen las más idóneas para su comparación con los resultados teóricos existentes.

Todas las curvas excepto la #2 y la #5 presentan pequeñas variaciones respecto a las respectivas anteriores o posteriores. Ello es debido a que al efectuar las derivadas temporales (anteriores) en estos dos casos los intervalos de tiempo son muy pequeños (ver Fig. 6) y por tanto la influencia de los errores queda muy realzada. Se eliminarán estas dos curvas en lo que sigue. En la Fig. 10a se observa el crecimiento paulatino de la velocidad axial que es positiva en toda la zona, hasta llegar a la #6, a partir de la cual se reduce el valor máximo y empieza a aparecer flujo inverso cerca del disco fijo, y finalmente, en la #8 también aparece cerca del disco de inyección.

Los resultados teóricos predicen (Mesequer, 1983) que cerca del instante de rotura, la velocidad axial en la zona del cuello cambia de signo en la mitad del cuello, dirigiéndose a cada lado hacia el disco al que quedará anclada la gota correspondiente.

Según se desprende de la Fig. 10, en el experimento todo el cuello posee velocidad axial positiva, y además la velocidad axial cambia otra vez más de signo, lo que no ocurre en la rotura teórica. Hay que tener en cuenta que las condiciones

iniciales del modelo teórico son diferentes.

Para explicar esta discrepancia una posible causa sería la existencia de una pequeña oscilación superpuesta al movimiento de rotura, iniciada en el instante de parada. En las imágenes siguientes a la de rotura, la onda producida en la rotura que avanza sobre la entrefase hacia el disco móvil se encuentra con otra que viaja en sentido contrario, que se correspondería con el flujo inverso en la #8.

Cuando la onda de rotura la sobrepasa y llega al disco, impone un ángulo de contacto próximo a  $180^{\circ}$  en la línea triple que produce el desprendimiento de dicha línea del borde del disco y su avance por la pared lateral, desparramándose.

La componente radial de la velocidad indica la velocidad de deformación de la entrefase. De #1 a #4 se observa el crecimiento de una onda cuyo mínimo se aproxima a la posición del cuello y el máximo avanza desde cerca del disco de inyección hacia la parte central, apareciendo en #4 otro mínimo cerca del disco móvil.

En las siguientes imágenes (#6 a #8) la velocidad radial en esta región disminuye ligeramente llegándose a hacer negativa cerca del disco móvil, correspondiendo al cambio de signo de la velocidad axial en esa zona; el máximo avanza hacia la región del cuello. Cerca del disco fijo la velocidad radial aumenta llegando a hacerse positiva en #8 mientras que el mínimo, situado en

la región del cuello, permanece constante.

En el caso de las velocidades, la comprobación de los errores cometidos se puede hacer observando el cumplimiento de la condición de velocidad nula en los discos. Esta se cumple automáticamente en el disco fijo, ya que se toma como punto de arranque en el proceso de cálculo mientras que la acumulación de errores y los efectos tridimensionales son los responsables de su no cumplimiento en el disco de inyección.

#### **7.4. CONCLUSIONES**

En este capítulo se han presentado los resultados obtenidos en el estudio de los datos recibidos por los experimentadores, recogidos durante la realización del experimento "Maximum Injection Rate" en el cohete TEXUS-12.

La existencia de diferentes tipos de deformación de la entrefase en los tres ciclos de inyección realizados muestra la existencia de al menos dos mecanismos en competencia, cuya importancia mutua depende de la velocidad de desplazamiento del disco. Durante la carrera de inyección del primer y tercer ciclo la deformación de la entrefase tiene dos semiondas, aunque opuestas en uno y otro caso, mientras que en el segundo ciclo aparecen deformaciones de muy pequeña amplitud pero con un mayor número de semiondas, indicando que este ciclo separa los dos tipos de comportamiento. Para dilucidar este comportamiento se requiere



el desarrollo de modelos teóricos que contengan las características más relevantes del proceso. Antes de disponer de dicho modelo, que permita determinar las magnitudes más adecuadas para ser medidas parece poco conveniente dedicarse a procesos de tratamiento de los datos elegidos de forma arbitraria. Es por ello que este estudio se ha limitado a la variación de características globales con el tiempo y a la puesta a punto del tratamiento de las formas extremas para obtener los campos de presiones y velocidades.

Este tratamiento se muestra muy prometedor en los resultados obtenidos pero necesita todavía un cierto número de comprobaciones para poder delimitar su capacidad de discriminación.

La posibilidad de utilizar la LCC en el laboratorio permitirá avanzar en la comprensión de los fenómenos involucrados en el proceso de inyección y completar los conocimientos actuales.

La aceptación de la propuesta sobre la estabilidad del modo C de columnas líquidas en rotación significaría un paso adelante al permitir un desarrollo independiente de este tipo de experimentos y descargar la apretada agenda de experimentación en el Módulo de Física de Fluidos.

## REFERENCIAS

Meseguer, J., 1983 "The breaking of axisymmetric slender liquid bridges", J. Fluid Mech. 130, pp. 123-151.

Sanz, A., 1985 "The influence of the outer bath in the dynamics of axisymmetric liquid bridges", J. Fluid Mech. 156, pp. 101-140.

Apêndice 1 : **"Long Liquid Bridges Aboard Sounding Rockets"**

## Long Liquid Bridges Aboard Sounding Rockets

**Abstract** Large free liquid volumes, 30 mm in diameter and 80 mm long, anchored to coaxial discs, have been achieved during a sounding-rocket flight. As these flights provide some six minutes of microgravity and the formation of the liquid column takes only a matter of seconds, ample time is left for experimentation. The results of these trials are presented, and the equipment used to obtain them is briefly described.

**Résumé** Au cours d'un vol sur fusée-sonde, on a pu obtenir des grandes colonnes de liquide en suspension (30 mm de diamètre  $\times$  80 mm de long) entre des disques coaxiaux. Comme ce genre de vol procure environ 6 minutes d'apesanteur et que la formation de la colonne de liquide ne prend que quelques secondes, on dispose amplement de temps pour l'expérimentation. On décrit l'équipement utilisé et les résultats obtenus.

## Introduction

Experimentation with liquid bridges in microgravity is of great value for the understanding of basic phenomena in a variety of disciplines<sup>1</sup>, which include single-crystal growth from a molten bridge. The problem lies in gaining access to the microgravity environment. Balancing the hydrostatic pressure of the liquid bridge in the ground-based laboratory with a bath of some other immiscible liquid of the same density is comparatively easy, but rarely satisfactory, since it heavily distorts the boundary conditions. Gravity's effects can be minimised by working with very small samples ( $\sim 1$  mm), but then the diagnostic techniques become problematical. By far the best approach is to have the liquid bridge floating free in a drop tower, on a parabolic aircraft flight, on a sounding rocket, or in Spacelab, the choice depending on the duration of the microgravity period needed (typically 3 s, 25 s, 6 min and open-ended, respectively).

The Spacelab option is obviously preferable, but the flight opportunities are limited and call for some five years of preparation. Consequently, until permanent Space Stations can offer a turnaround time of less than a year, sounding rockets are best suited to provide the microgravity environment, giving up to 6 min of research per flight. They are also of great help for testing new apparatus and procedures intended for Spacelab/Space Station. Consequently, it is not surprising that microgravity research aboard sounding rockets has proliferated during recent years.

However, a lot of material-science applications involve very slow mass- and heat-diffusion processes that operate over much longer periods, and the same was initially thought to be true with large free liquid masses. Experiments with small liquid bridges ( $\sim 1$  cm<sup>3</sup>) have been going on since the first sounding-rocket flights<sup>2</sup>. Several liquid-release mechanisms have been proposed for freeing the liquid once in microgravity, thereby minimising both the time taken prior to experiment commencement and the residual motion generated. On the recent Texus-12 sounding-rocket flight, only 10% of the microgravity period provided by the rocket was consumed for establishing a long liquid bridge (60 cm<sup>3</sup> in this case), leaving a profitable 90% free for the investigations proper. It is worth consulting Reference 3 to compare the achievements of the Texus flight with those during the flight of Spacelab-1 in order to realise the particular advantages offered by the two types of carrier.

## Equipment on Texus-12

The equipment flown on Texus-12 on 6 May 1985 included the Liquid Column Cell (LCC) developed by ERNO (Bremen) for the European Space Agency (ESA). It first flew on Texus-10 on 15 May 1984, but a mechanical problem in the drive motor prevented it from functioning properly on that flight.

The LCC (Fig. 1) consists of a main quasi-cylindrical body, 0.15 m in diameter and 0.45 m long, weighing some 10 kg, plus mission-dependent external equipment for observation, image recording and electrical conditioning (Fig. 2). During this flight, background illumination (a panel of 5 W lamps) was used to highlight the deformation of the oil column against a translucent millimetric raster screen. The recording was done with a 16 mm cine-camera (at 20 fps). The apparatus can be operated on the ground as a stand-alone unit to support neutral-buoyancy experiments in the preparation of flight trials (a most desirable capability not provided by many more sophisticated facilities), or readily embarked on sounding rockets, Shuttle flights or Spacelabs.

In the equipment's present form, liquid bridges up to 60 mm in diameter by 100 mm long can be established between interchangeable end plates by injecting liquid through one of the plates.

Although the main emphasis during the Texus-12 flight was on the visual recording of the liquid's outward shape, several monitoring and housekeeping signals were made available on the ground in real time during the flight, including disc position and speed, liquid and chamber temperature and pressure, lamp and camera voltage and current, etc.

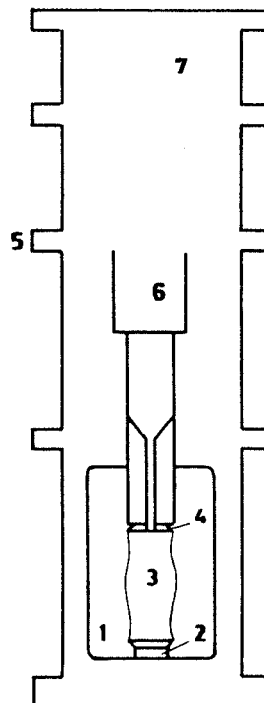
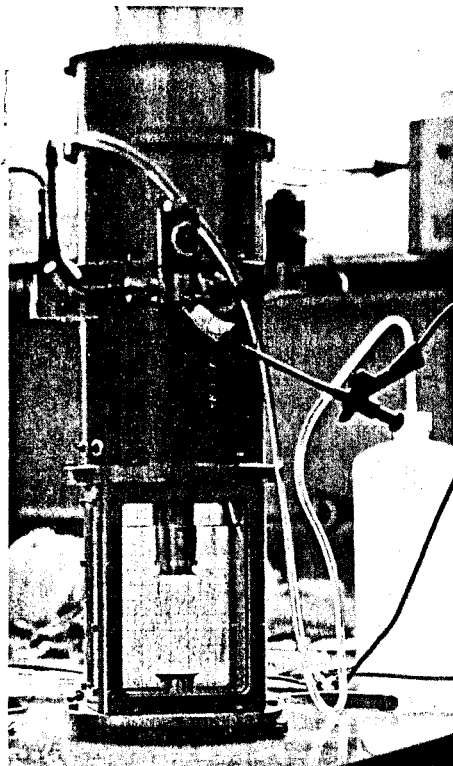


Figure 1. The Liquid Column Cell (LCC) being operated on a desk top.

1. Test chamber filled (to nine tenths), with a neutral bath
2. Fixed disc
3. Liquid column
4. Injection disc
5. Connectors for syringe filling and temperature and pressure probes
6. Syringe device
7. Motor box to drive the syringe piston (feed disc)

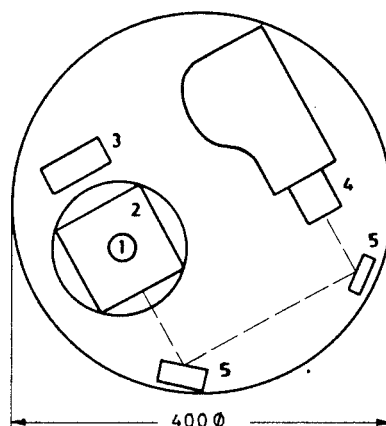
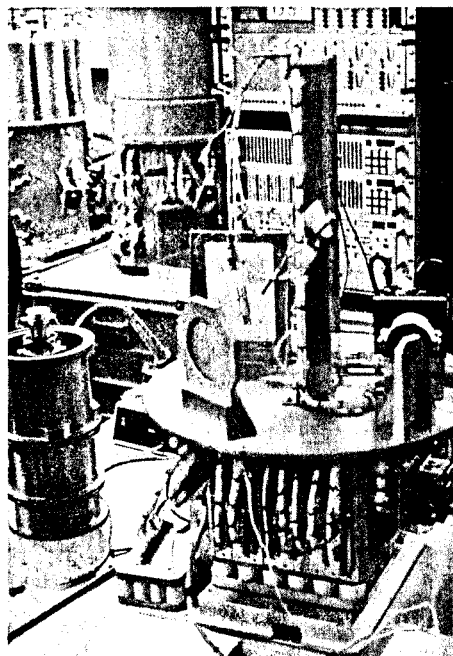


Figure 2. Observation system used on Texas-12

(a) The standard 400 mm-diameter platform for the Texas sounding rocket is seen in the foreground, with the Liquid Column Cell dismounted for clarity (upside down on the left)

- (b) Plan view: 1. Liquid column cross-section  
2. Test chamber  
3. Light box  
4. Cine-camera  
5. Mirrors

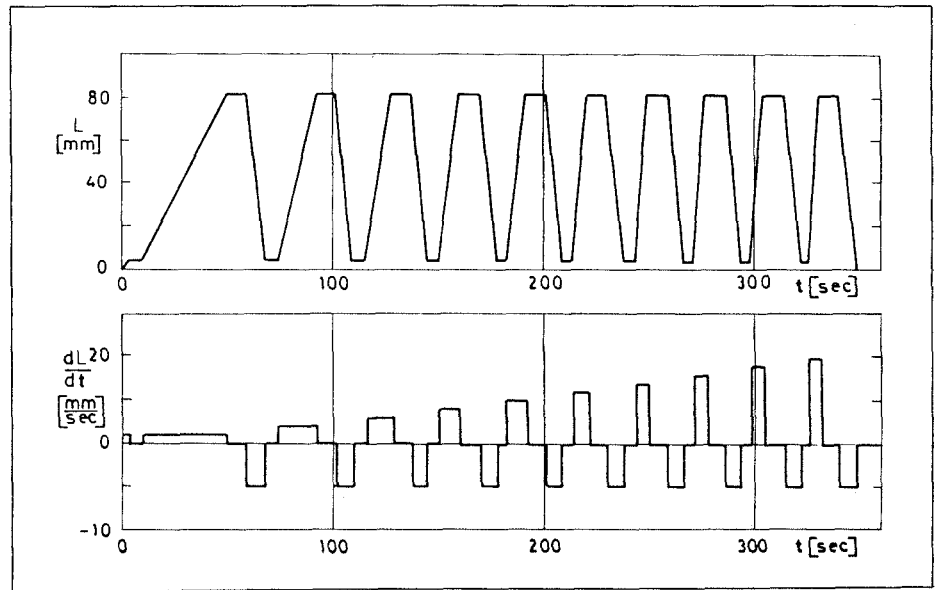
The prime goal for the Texas-12 experiment was to establish a long cylindrical liquid column in the minimum time. Because liquid spillage is irreversible, a smooth, progressive approach was followed, filling and recovering the liquid back to the syringe at increasing disc speeds, from 2 mm/s to 20 mm/s, in steps of 2 mm/s (Fig. 3).

The liquid used was dimethyl-silicone oil, with a surface tension of 0.02 N/m, a viscosity of  $5 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s and a density of 920 kg/m<sup>3</sup>. The aluminium discs used were 30 mm in diameter, with the rim edge (5 mm) cut back at 45° to provide an enhanced edge effect (anchoring capability).

Ground testing in a neutral-buoyancy configuration indicated that the maximum injection rate would be in the range 10 to 15 mm/s, so that rupture was expected to occur near the sixth stretching (Fig. 3). Instead, it took place at the end of the third (Fig. 4d), helped by strong inertia forces in the abrupt stop at the end of the span. This behaviour had not been apparent on the ground because of the

## The experiments conducted

Figure 3. Nominal disc position  $L$  and speed  $dL/dt$ , both as a function of time  $t$ , for the Texus-12 experiments



damping effect of the outer bath (a water-methanol mixture to match the density of the oil).

Another relevant finding during the ground tests was the negligible influence of the withdrawal speed, which greatly simplifies the removal phase. Some striking inertia waves showed up in flight near the end of the removal steps, but they did not endanger the integrity of the bridge.

During the first stretching during the Texus flight (from a to b in Fig. 4), the liquid column behaved as expected. For most of the time the zone was perfectly cylindrical; finally, a slight 'necking' developed near the injection disc, giving rise to slow oscillations (period  $\sim 1$  s). The withdrawal was nominal except for the rapid reflecting waves at the end, which we have already mentioned.

During the second stretching, the column grew astonishingly cylindrical up to point c (Fig. 4), but then, after stopping at that point, an unexpected necking started near the fixed disc. The semi-period was close to 8 s, but its further development could not be followed because withdrawal then started. The necking retained an almost constant amplitude until the end, at which time larger reflecting waves than before could be observed.

During the third stretching the column quickly developed a permanent necking (about 30% of radial deformation peak-to-peak), surprisingly, near the fixed disc and much in contrast to ground-test experience. This undulation continued after stopping at d (Fig. 4) and gave way to the liquid-bridge disruption shown by e, f, g and h in Figure 4.

Slow breaks are not fatal on the ground because the drops can be easily merged and the bridge re-established, but on this flight the large oscillation in the big drop remaining on the feeding disc produced an edge angle greater than  $180^\circ$  and the liquid overspread towards the back of the disc, causing a loss of working liquid. In the subsequent operations air was sucked into the syringe, mixed with the oil and the usual emulsion mess developed.

## Conclusions

The Texus-12 experiment has demonstrated that large liquid masses can be freed from a reservoir and accurately positioned between two solid coaxial discs, all in less than a minute in weightlessness, thus enlarging the range of possible experiments with liquid bridges aboard sounding rockets.

Once more, inertial forces have been shown to play a dominant role in the behaviour of large liquid masses under microgravity, and careful attention must be paid to them in the future.

Detailed analysis of the data gathered is still proceeding, but a proposal has already been made for future Texus flights to study the deformation of a long

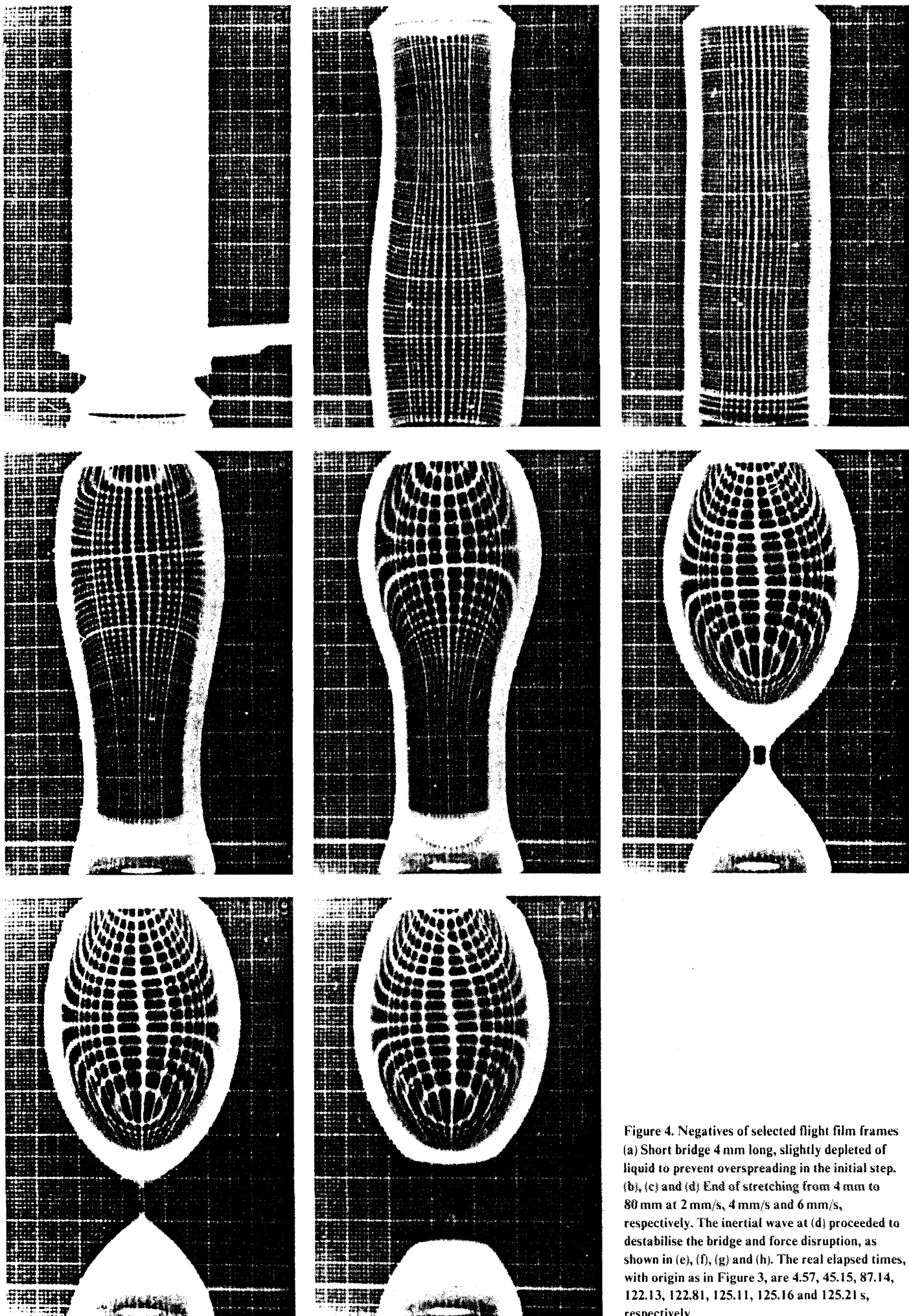


Figure 4. Negatives of selected flight film frames (a) Short bridge 4 mm long, slightly depleted of liquid to prevent overspreading in the initial step. (b), (c) and (d) End of stretching from 4 mm to 80 mm at 2 mm/s, 4 mm/s and 6 mm/s, respectively. The inertial wave at (d) proceeded to destabilise the bridge and force disruption, as shown in (e), (f), (g) and (h). The real elapsed times, with origin as in Figure 3, are 4.57, 45.15, 87.14, 122.13, 122.81, 125.11, 125.16 and 125.21 s, respectively



liquid column established between the feed disc and a new opposing disc. The latter, instead of being fixed as on Texus-12, will be made to rotate eccentrically to excite a skipping-rope-like movement in the liquid column.

## Acknowledgement

This work is supported by the Spanish Commission for Space Research (CONIE).

## References

1. Da Riva I & Napolitano L 1983, Fluid physics under reduced gravity – an overview, ESA SP-191, June 1983.
2. Monti R, Napolitano L & Mannara G 1984, Texus flight results on convective flows and heat transfer in simulated floating zones, Proc. 5th European Symposium on Material Sciences under Microgravity; Results of Spacelab-1, Schloss Elmau, Germany, 5-7 November 1984, ESA SP-222, pp. 229 – 236.
3. Martinez I 1984, Liquid column stability – Experiment 1-ES-331, Proc. 5th European Symposium on Material Sciences under Microgravity; Results of Spacelab-1, Schloss Elmau, Germany, 5-7 November 1984, ESA SP-222, pp. 229 – 236.

Manuscript received 24 June 1985

Apêndice 2 : **"Eccentric Rotation of a Liquid Bridge"**

Submitted:  
1-April-85

QUESTIONNAIRE\*

SOUNDING ROCKET EXPERIMENT PROPOSAL

Please return this Questionnaire to:

EUROPEAN SPACE AGENCY  
Microgravity Office: attn.: H.U. WALTER  
8-10, rue Mario Nikis  
F 75738 PARIS CEDEX 15, France  
Tel. (33.1) 273 73 19

EXPERIMENT TITLE

ECCENTRIC ROTATION OF A LIQUID COLUMN

Principal Investigator(s):

Name(s): Sanz, A., Martínez, I. & Mesequer, J.

Institution: Universidad Politécnica de Madrid

Address: E.T.S.I.Aeronáuticos  
Ciudad Universitaria  
28040-MADRID

Telephone n°:  
34-1-244-47-00

Telex n°:  
23780 upmad

Co-Investigator(s):

Name(s):

Institution:

Address:

Telephone n°:

Telex n°:

---

\* If you consider submitting ideas for experiments or proposals for flight experiments, please submit a 1 to 2 page outline and/or complete this Questionnaire.

Questionnaire continued

I. Scientific Objectives:

To include scientific background, relevance with respect to microgravity and an indication whether the investigation proposed is aiming at the testing of theory or has the objective to solve problems in view of applications.

This experiment belongs to a series of trials, being performed on Spacelab and TEXUS, intended to test theoretical analysis of the behaviour of long liquid bridges under microgravity.

In this opportunity, the effect of an eccentric rotation imposed in one of the end supports is considered.

Some occasional data on that particular is available from Skylab IV (1973) and Spacelab 1 (1983), but a devoted research is required to learn specific details of the free surface distortion due to the eccentric rotation; mainly, maximum radial deformation and its location along the axis.

Besides, the risk of liquid spillage by centrifugation is such that Spacelab's multiuser equipment pose severe constraints to this kind of trials, which are best suited to individual sounding rocket flights.

Questionnaire continued**II. Procedure and Experiment Hardware Requirements:**

Experiment concept, sequence of events, schematic of hardware, could one of the existing modules be used?

Sensoring techniques (e.g. interferometer, television-camera etc.), special requirements (e.g. thermostat, vacuum, high pressure, high temperature, steep thermal gradient etc).

EQUIPMENT: This experiment uses the existing module TEXUS-06 (Maximum injection rate) with the following minor modifications:

- The bottom disc is to be changed to a similar one but eccentric (Fig. 1).
- A new motor and transmission is to be added to rotate the bottom disc.
- The rotation speed and associated housekeeping signals must be acquired.

PROCEDURE: After the initial step of forming a liquid column (as in Maximum injection rate), the operational steps foreseen are A,B,C,D,E,D,F and G (see Fig. 2 and Table).

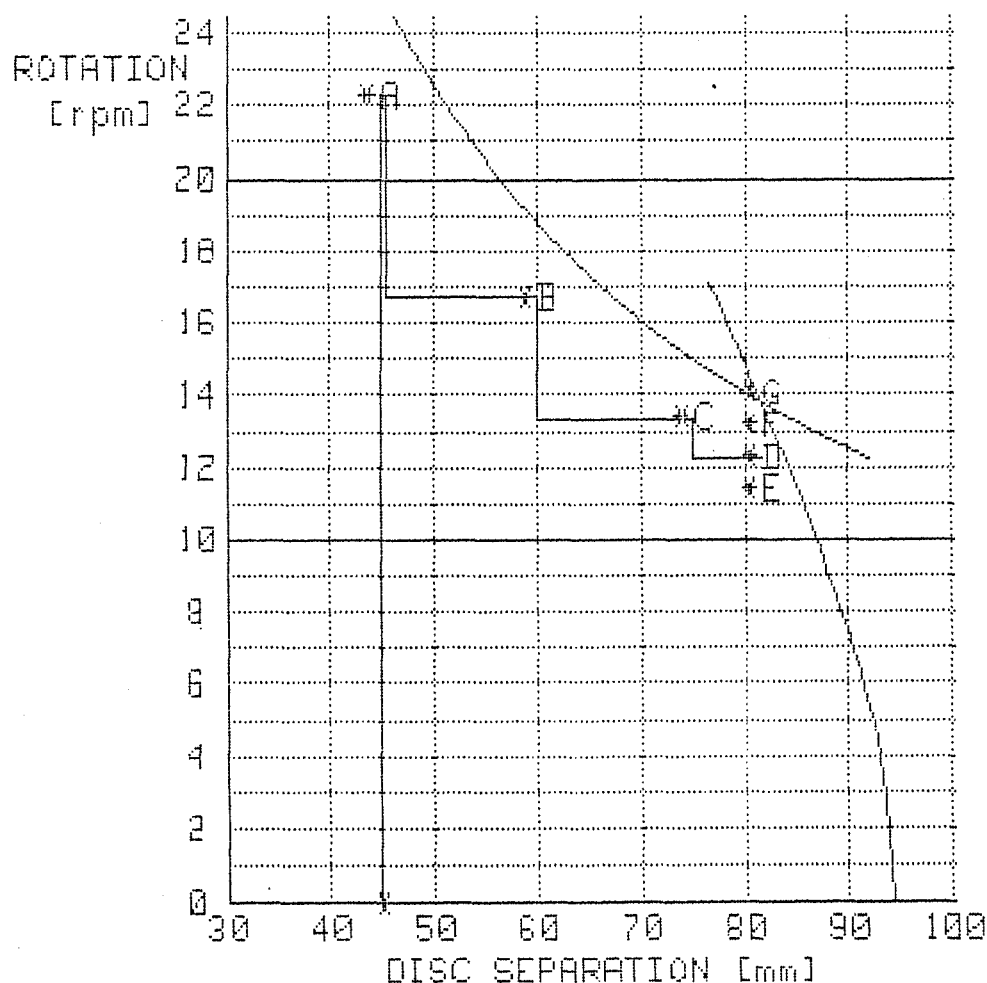


Table of values		
Length [mm]	Rotation [rpm]	Time [s]
45	22,2	35
45	16,8	5
60	16,8	35
60	13,3	5
75	13,3	35
75	12,3	5
82	12,3	35
82	11,5	35
82	12,3	35
82	13,2	35
82	14	50

Fig. 2. Stability diagram for eccentric cylindrical liquid columns of 30 mm $\varnothing$  of silicone oil.

Questionnaire continued

III. Ground-based Support Programme:

- (a) Previous work in your laboratory with references, please include reprints, if possible.
- (b) Experimental and/or theoretical studies required

This group is involved in microgravity research since 1974. We have experiments performed and scheduled for Spacelab and TEXUS.

Theoretical studies and ground simulation in Plateau tank are currently performed.

IV. Funding Requirements:

- (a) Present funding situation in your laboratory, number of permanently employed co-workers
- (b) Personnel required to conduct the proposed study
- (c) Requirements for hardware development

Funding for this activities is being provided on a year basis by the Natinal Commission for Space Research (CONIE).

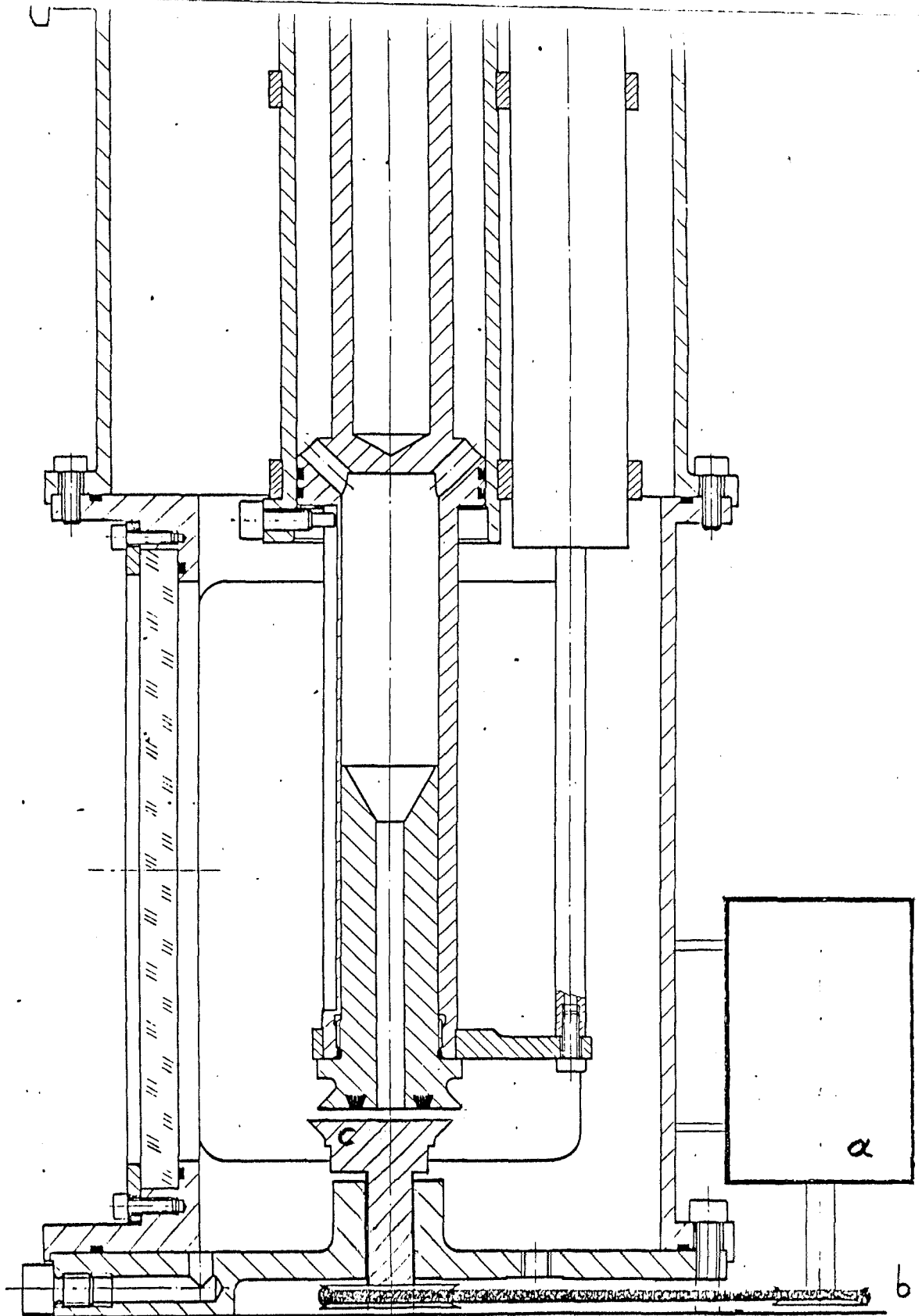


Fig. 1. Detail of modifications to be introduced in TEXUS TEM-06 for experiment Eccentric rotation of a liquid zone.

- a) New motor for bottom disc rotation.
- b) Mechanical transmission.
- c) Eccentric disc (moves like a cam).

**Apéndice 3 : AJUSTE DE LOS DATOS EXPERIMENTALES. CALCULO  
DE LA CURVATURA Y DEL CAMPO DE VELOCIDADES.**



### APENDICE 3

#### AJUSTE DE LOS DATOS EXPERIMENTALES.

#### CALCULO DE LA CURVATURA Y DEL CAMPO DE VELOCIDADES.

Una vez medida la forma de una entrefase en una imagen convenientemente ampliada, los datos obtenidos se pueden representar como una función de variable discreta. Pero la curvatura tiene que cumplir ciertos requisitos.

El primero es la continuidad de la derivada tercera de la forma, para que la curvatura, que contiene derivadas segundas, tenga derivada continua, es decir, la aceleración del fluido no puede sufrir saltos dentro del fluido, salvo quizás en la frontera debido a un cambio en la velocidad del disco de inyección. Para que la curvatura calculada directamente de los datos experimentales cumpla esta condición el error de la medida debería ser un orden de magnitud inferior a  $H^3$ , donde  $H$  es el espaciado de los puntos. Una discretización de 20 puntos exigiría un error relativo al radio menor de  $10^{-4}$ . El error en las medidas presentadas en este informe es unas 100 veces mayor y reducirlo hasta el nivel mencionado requeriría un sistema de toma de imágenes y medida que tuviera una resolución del orden de micras. Pero es posible soslayar este método directo ajustando los datos experimentales a una función de variable continua que asegure la condición anterior.

La segunda es que, si la velocidad de los discos es constante y el fluido es no viscoso, las ecuaciones del movimiento exigen que el gradiente de presiones sea nulo en ellos y, por lo tanto, la curvatura presente un máximo o mínimo allí. Este requisito puede emplearse para evaluar los resultados obtenidos por los diferentes ajustes.

Los métodos de ajuste se basan en el empleo de los datos experimentales no como los valores exactos de una función sino como datos procedentes del muestreo de la variación de una función determinada y que contienen un cierto error. El error de las medidas junto a la separación de las mismas introduce una información de alta frecuencia (en frecuencias iguales o mayores que la de muestreo) que debe ser desechada.

En este estudio se han ensayado dos tipos de funciones de ajuste diferentes: en el primero la función es un conjunto de polinomios de un cierto grado, que empalman en cada intersección hasta la derivada tercera (para asegurar la condición anterior de la curvatura), y el segundo es un desarrollo de la deformación respecto del cilindro en serie de Fourier de senos (para asegurar el valor nulo y evitar el fenómeno de Gibbs en los extremos del intervalo lo que introduciría armónicos espúreos de alta frecuencia).

El hecho de emplear dos métodos diferentes tiene su origen en que aunque cualquier función que cumpla unos mínimos requisitos ajusta bien la forma de la entrefase en cambio la curvatura

depende en cierto grado (y cuando el error de los datos sobrepasa una cierta cota) de la función de ajuste. De esta forma pueden compararse los resultados obtenidos por ambos métodos.

En lo siguiente se analiza la influencia en el cálculo de la curvatura de los diversos parámetros de los ajustes, así como del error en las medidas. Los coeficientes de los polinomios se determinan por el método de minimizar la desviación cuadrática media, y los del desarrollo de Fourier por las fórmulas correspondientes, que como es sabido, son deducibles también por el método anterior.

Las pruebas efectuadas para encontrar los valores más apropiados de los parámetros del ajuste por un conjunto de polinomios han dado los siguientes resultados. El número de tramos (para un número pequeño de tramos) debe ser múltiplo par del número de semiondas de la deformación, y el grado de los polinomios debe ser al menos uno mayor que el de la derivada más alta que deba conservarse en el empalme. Como, por otro lado, el número de coeficientes independientes a determinar debe ser el menor posible, compatible con las características de la curva real, con el fin de filtrar al máximo el ruido introducido por el error, se deduce que el grado de los polinomios debe ser 4, al igual que el número de tramos, ya que las deformaciones tienen dos semiondas. Como cada polinomio tiene 5 coeficientes, aparecen 20 incógnitas a determinar, de las que desaparecen 12 al existir 3 empalmes con 4 condiciones en cada uno, y por tanto

el número de parámetros libres se reduce a 8. El número de datos experimentales debe ser varias veces este valor con el fin de permitir la minimización del error.

El aumento del número de intervalos o del grado del polinomio, para un número fijo de datos experimentales, aumenta el número de puntos de inflexión de la curvatura, lo que sin duda es un artificio introducido por el método. En cualquier caso el aumento de estos parámetros reduce los grados de libertad del ajuste y, por tanto, la capacidad de filtrado del ruido.

El método de ajuste por un desarrollo de Fourier (transformada de Fourier) tiene como único parámetro el número de coeficientes del desarrollo. Cuando se utiliza este método para el muestreo de una función hay que considerar la limitación de la frecuencia máxima discernible, que debe ser como máximo la mitad de la frecuencia de muestreo (criterio de Niqyst). Como se está empleando para calcular la curvatura, proporcional a la derivada segunda, los términos del desarrollo en el cálculo de ésta vienen multiplicados por el cuadrado de la frecuencia, reduciendo más aún la frecuencia máxima discernible.

Con el fin de comparar los resultados obtenidos por ambos métodos, en la Fig. 11 se muestra la variación de la curvatura de una deformada senoidal de amplitud 0.2, a la que se superponen diferentes fuentes de error. En la Fig. 11a se truncan los valores de la deformación para introducir errores del 0.1 % y del 10 %, y en la Fig. 11b se superpone a la

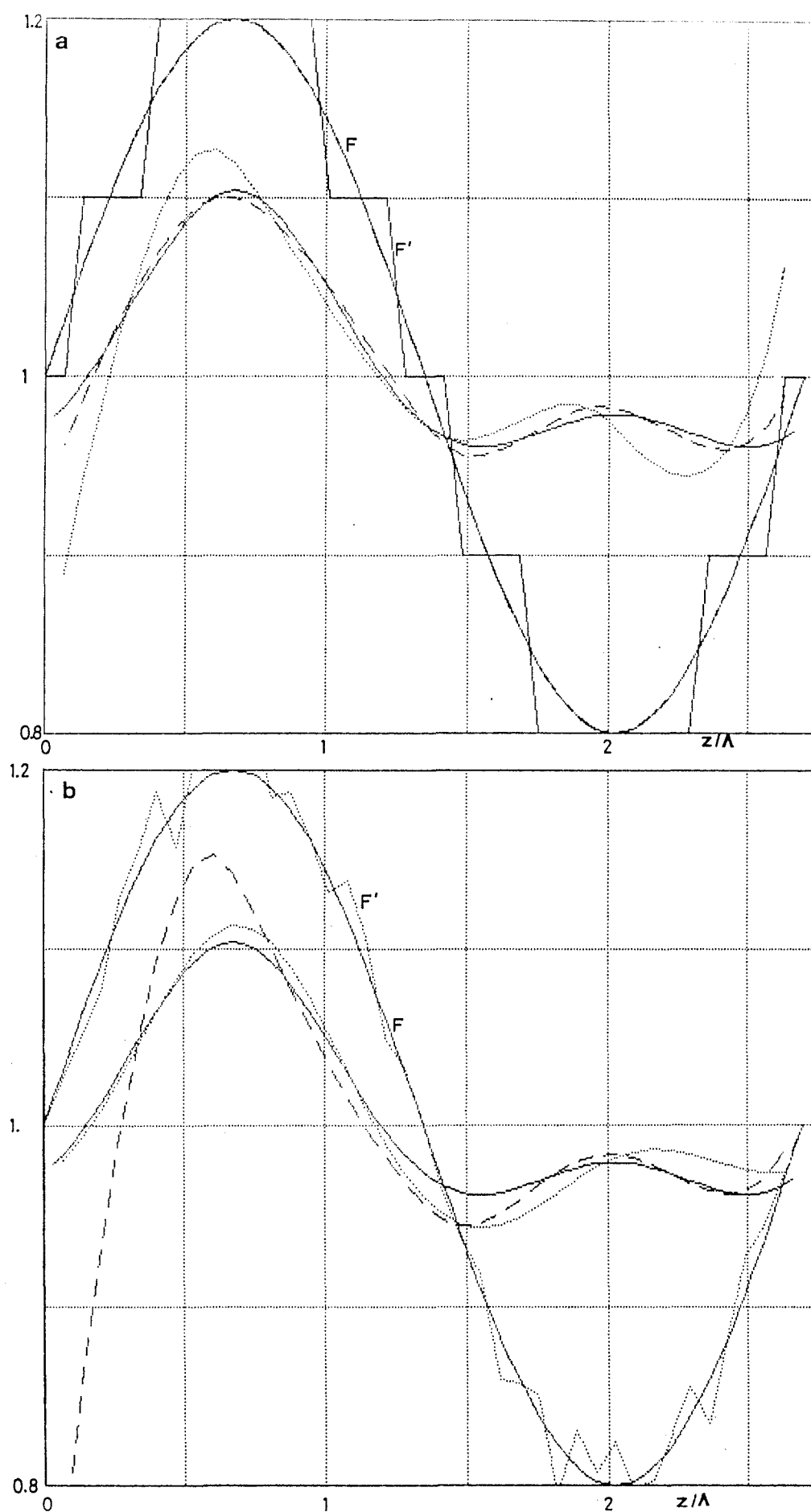


Fig. 11. Variación de la curvatura de diversas formas.

- a)  $F$ , formas senoidal y truncada (error 0.1 %);  $F'$ ,  $F$  truncada (error 10%). De las líneas no marcadas: línea continua, curvatura exacta y obtenida de  $F'$  ajustada por un desarrollo de Fourier (4 términos); a trazos (puntos), curvatura de  $F$  ( $F'$ ) aproximada por un conjunto de polinomios (4 polinomios, 4<sup>o</sup> grado).
- b)  $F$ , forma senoidal;  $F'$  superposición a  $F$  de un ruido aleatorio del 10% de amplitud de la deformación. Línea continua, curvatura exacta; de puntos, aproximación de Fourier; a trazos, conjunto de polinomios. En ambas: muestreo, 40 puntos; esbeltez de la zona  $\Lambda = 2.7$ .

amplitud de la deformación un error aleatorio del 10 % de ésta. En el caso a) al ser un error no aleatorio, el desarrollo de Fourier proporciona unos valores muy aproximados de las amplitudes de los primeros armónicos, ya que las frecuencias del ruido empiezan a aparecer por encima de la de muestreo, que es del orden del número de puntos y la serie se ha truncado en el cuarto término.

El conjunto de polinomios proporciona una buena estimación de la curvatura salvo en las proximidades de los extremos, creciendo estas regiones cuando aumenta el error de los datos utilizados en el ajuste.

En cuanto a la influencia de un error aleatorio, el desarrollo de Fourier conserva una buena aproximación en todo el intervalo mientras que en el caso del conjunto de polinomios el ajuste no es uniforme, es similar al de Fourier en la región central, desviándose en los extremos.

La aplicación a un caso experimental, la curva #2 del grupo 3, se muestra en la Fig. 12. Se ha elegido esa curva por estar muestreada con 43 puntos. Se observa que ambos ajustes tienen un comportamiento cualitativo similar en la región central, pero aparecen apreciables diferencias en los extremos, como se habían advertido antes. También se muestra el efecto de la truncación del desarrollo de Fourier (frecuencia de filtrado). Este efecto apenas es apreciable y las curvaturas obtenidas son muy semejantes cuando el número de términos es menor que 10. Pero al

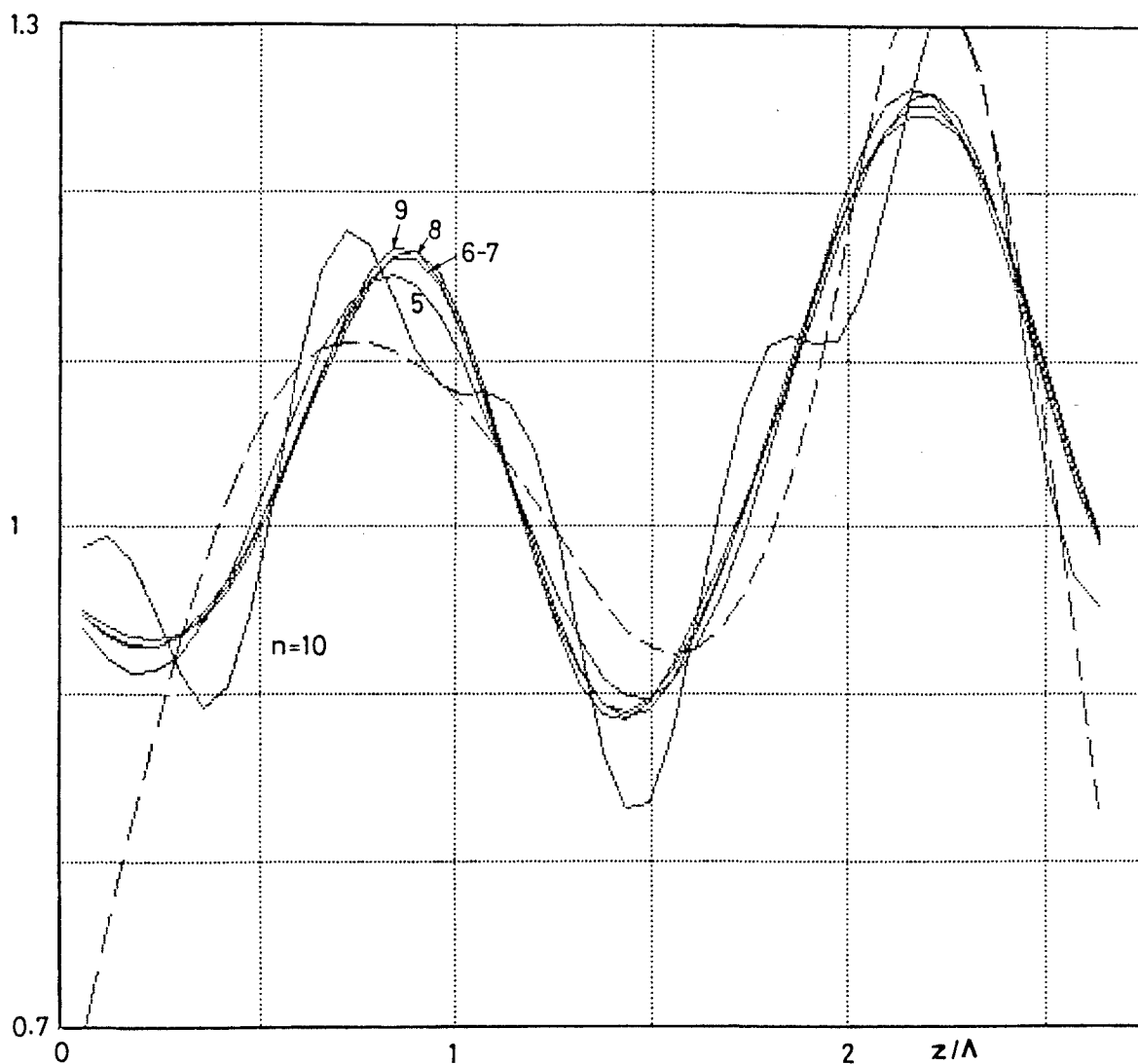


Fig. 12. Comparación de las curvaturas obtenidas a partir de las curvas ajustadas por diferentes métodos. La forma de la interfase es la #2 del grupo 3. Línea continua: desarrollo de Fourier con  $n$  términos. Línea a trazos: conjunto de polinomios. Muestreo: 45 puntos. La esbeltez es  $\Lambda = 2.7$ .

retener este término la curvatura empieza a presentar grandes variaciones respecto a los valores anteriores, procedentes de los armónicos introducidos por el ruido asociado al error de las medidas y a la frecuencia de muestreo: el hecho de que esta influencia aparezca en el  $10^0$  término, que corresponde a una frecuencia la cuarta parte de la de muestreo, se debe a que al derivar para obtener la curvatura los términos correspondientes aparecen multiplicados por el cuadrado de la frecuencia y por ello empiezan a afectar en escalas de frecuencia menores que la predicha por el criterio de Nyquist.

En cuanto al campo de velocidades, conocida la variación de la entrefase con el tiempo y añadiendo la hipótesis de que el movimiento del líquido es cuasiunidimensional (la velocidad axial es constante en cada sección del puente) puede calcularse la velocidad axial en cada sección integrando la ecuación de continuidad correspondiente (Meseguer, 1983) y posteriormente la velocidad radial. Debido a la hipótesis de unidimensionalidad este proceso sólo puede emplearse en los casos donde no existe inyección de fluido, ya que ésta introduce efectos tridimensionales. En estos experimentos sólo ocurre en las posiciones extremas de la carrera del disco de inyección.

Al utilizar básicamente una ecuación de conservación del volumen es necesario que todas las formas que se utilizan en el proceso tengan el mismo volumen ya que de lo contrario su variación dividida por el intervalo de tiempo entre dos formas daría lugar a un flujo neto a través del disco opuesto al de arranque de la



integración, lo cual se contradice con la presencia del disco.

Para evitar las diferencias de volumen introducidas por los errores de medida, las sucesivas formas a emplear en el proceso de cálculo deben ser normalizadas. Como en el comentario referente a la curvatura, si el error fuera suficientemente pequeño estas correcciones no serían necesarias. Sin embargo, el aumentar la precisión de las medidas cuando deben tratarse un número elevado de imágenes supondría un aumento paralelo del esfuerzo que, sin embargo, no es esencialmente necesario si se dispone de algoritmos que compensen la menor precisión.

Las correcciones en el caso presentado en este Informe han consistido en sumar a las coordenadas de la entrefase una variación parabólica y simétrica respecto al plano medio que compensase las pequeñas diferencias de volumen y la diferencia de medidas de los discos respecto al valor medio en el grupo de curvas.

El efecto conseguido se muestra en las Figs. 10 y 11. La acumulación de errores de medida y los posibles efectos tridimensionales producen la desviación de las velocidades radial y axial respecto al valor nulo que deberían tener en los discos. Se requiere un esfuerzo adicional para separar la influencia de ambos efectos.

## **8. EXPERIMENTOS EN EL LABORATORIO SPACELAB-D1**

## **8. EXPERIMENTOS EN EL LABORATORIO SPACELAB-D1**

### **8.1. INTRODUCCION**

Hasta el presente, y desde que a finales de Noviembre de 1983 hiciera su vuelo inaugural, el Spacelab es el único laboratorio espacial recuperable que permite realizar experimentos controlados manualmente. Cuando los experimentos son nuevos y delicados, la intervención humana hace más fiable los ensayos, que de otra manera tendrían menor probabilidad de éxito.

Esta es la segunda oportunidad en que se han realizado ensayos sobre estabilidad de columnas líquidas en el Spacelab. La primera misión (1983) tenía como objetivo primordial la verificación del funcionamiento del Spacelab y su acoplamiento al Orbiter, aprovechando la ocasión para hacer una multitud de ensayos científicos multidisciplinarios que mostraran las posibilidades de dicho laboratorio que, habiendo sido diseñado y construido en Europa por la Agencia Espacial Europea (ESA), fue adquirido en propiedad por la agencia estadounidense NASA.

Después del primer vuelo, de diez días de duración, la NASA ha fletado en dos ocasiones más este mismo laboratorio, una de ellas en Enero de 1985 para realizar experimentos en ingravidez, y la otra en Abril de este mismo año para llevar a cabo observaciones astronómicas.

Posteriormente, el 30 de Octubre, ha realizado su cuarto vuelo

este aparato, esta vez fletado por la Agencia Espacial Alemana (DFVLR), en donde la ESA adquirió una pequeña parte de los recursos para ponerlos a disposición de los demás países miembros de la organización europea. Dentro de esta contribución se incluyó por segunda vez el experimento español en física de fluidos. Este vuelo, denominado Spacelab-D1, estaba dedicado a ensayos en ingravidez, tanto de ciencia de los materiales como de biología.

En los dos años que separan los vuelos Spacelab-1 y Spacelab-D1 se ha realizado un gran esfuerzo de investigación en el programa de columnas líquidas. Además de proseguir los estudios analíticos, numéricos y experimentales en tierra, se han realizado dos series de ensayos tripulados en vuelo parabólico con aviones de la NASA y otros dos ensayos automáticos en cohetes de sondeo alemanes, el último de los cuales (en el TEXUS-12, descrito separadamente) con unos resultados tan buenos que permitieron ya afrontar los experimentos en el Spacelab-D1 con mucha mayor confianza de la que podían suministrar los problemáticos ensayos en el Spacelab-1 y el fracaso técnico del TEXUS-10.

El objetivo de los experimentos realizados en ambos vuelos del Spacelab era el mismo: formar una gran columna líquida esbelta, anclada a los bordes de dos discos iguales y coaxiales, para después aplicarle pequeñas perturbaciones mecánicas bien controladas y poder estudiar la respuesta de la columna líquida, principalmente en lo que a estabilidad de la forma se refiere, problema éste que es de reconocido interés en muchas aplicaciones

de la técnica de zona flotante a la purificación y crecimiento cristalino de valiosos materiales.

El problema que surgió en el Spacelab-1 fue la dificultad de controlar el anclaje del líquido al borde de la superficie de trabajo, dando lugar a continuos desparramamientos que consumieron la mayor parte del tiempo disponible para estos ensayos.

Pese a que la gran pericia y dedicación de los astronautas, y la prolongación del vuelo un día más, sirvieron para poder conseguir grandes columnas líquidas (longitud/diámetro medio  $\sim 1.7$ ) apoyadas en otros discos de trabajo que fueron preparados in situ, la verdad es que los resultados principales sólo pudieron ser de tipo cualitativo, ya que los defectos en la geometría (los nuevos discos no eran iguales y al pegarlos a mano sobre los originales no quedaron concéntricos) y la enorme contaminación que había sufrido el líquido de trabajo al cabo de tantas pruebas infructuosas (tenía muchas burbujas de aire y se había formado una emulsión), impidieron una evaluación cuantitativa de las imágenes obtenidas.

## **8.2. MODIFICACIONES RESPECTO A LOS ENSAYOS EN EL SPACELAB-1**

Como ya se explicó, la dificultad encontrada en los primeros ensayos en el Spacelab en Diciembre de 1983 con respecto al manejo del líquido de trabajo fuera del depósito tuvo su origen en un diseño inapropiado de los discos de trabajo y del sistema

de inyección que, pese a haberse apuntado ya un par de años antes del vuelo, no pudo rectificarse por imperativos logísticos. Para la segunda misión se introdujeron las modificaciones siguientes:

1. Utilizar discos más prominentes y con borde de retroceso.
2. Disminuir la velocidad inicial de inyección utilizando una jeringa más pequeña, movida a mano para un mayor control por el astronauta.

Ambas modificaciones, junto con la concepción original usada en el primer vuelo, se muestran en la Fig. 1.

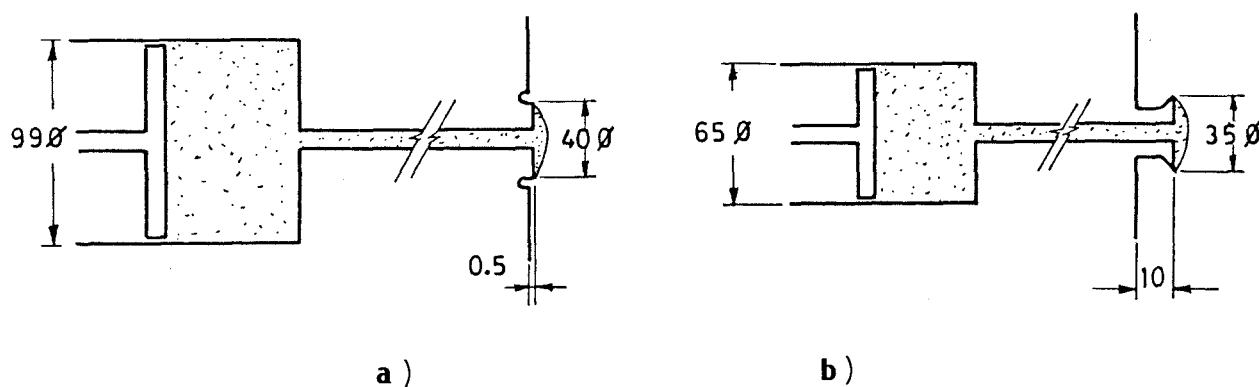


Fig. 1. Diámetro efectivo del depósito y geometría de los discos usados: a) Spacelab-1. Inyección automática a  $0,8 \text{ cm}^3/\text{s}$  y disco rebajado. b) Spacelab-D1. Inyección manual y disco saliente y agudo.

### 8.3. PREPARACION DE LA MISION

El trabajo de preparación de estos nuevos experimentos puede dividirse en: introducir las modificaciones pertinentes para salvar las dificultades encontradas anteriormente, asegurándose de que estas mejoras sí funcionan, y llevar a cabo el entrenamiento de los nuevos astronautas en el manejo del equipo experimental y los objetivos de la experimentación.

Como ya se ha mencionado en la Memoria de actividades, a finales de Enero tuvo lugar en Bruselas la reunión de revisión de resultados de los primeros ensayos en vuelos parabólicos, realizados en Diciembre de 1984 en Houston (Texas) a bordo del avión KSC-135 de la NASA. Varios de los investigadores europeos de física de fluidos aprovecharon esta oportunidad para conducir ellos mismos sus experimentos.

A principios de Marzo tuvo lugar en ESTEC una prolongada sesión de entrenamiento de los astronautas para la misión Spacelab-D1 (prevista del 30 de Octubre al 6 de Noviembre de este año) para ejercitarse en el manejo del Módulo de Física de Fluidos, que ha sido sustancialmente modificado respecto al que voló a bordo del Spacelab-1 en 1983.

En Junio se realizó una segunda sesión de vuelos parabólicos en el avión KSC-135, en la que se ensayaron los discos de trabajo que van a ser usados en el Spacelab-D1. Aunque no se pudieron conseguir zonas largas por el movimiento residual de la aerona-

ve, se lograron detectar posibles problemas de compatibilidad de materiales en otros experimentos que hacen uso común del Módulo de Física de Fluidos.

A principios de Agosto tuvo lugar el ensayo general de la misión Spacelab-D1 desde el Centro de Control de Operaciones Espaciales de Alemania (GSOC) en Oberpfaffenhofen (Munich), con conexión directa con el Centro de Control de la Misión en Houston y, a través de este último, con los astronautas situados en el simulador del Spacelab en Colonia (Alemania). Como se sabe, este vuelo del Spacelab está fletado íntegramente por Alemania y el control de los experimentos se realizará en directo desde GSOC vía Houston.

Pese a que los equipos de comunicaciones y tratamiento de datos son más modernos que los pioneros equipos utilizados en Houston para el Spacelab-1 en 1983, todavía se observaron muchas deficiencias técnicas, por lo que los investigadores solicitaron una nueva simulación de la misión, aunque lo apretado del calendario hizo impracticable su realización.

Posteriormente, y conocido ya el plan de vuelo nominal para el Spacelab-D1, el astronauta encargado del experimento español en Física de Fluidos (en este segundo vuelo había dos experimentos españoles) se desplazó a Madrid para recibir un entrenamiento más detallado, y practicar en las instalaciones de microgravedad simulada del Laboratorio de Aerodinámica de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos. La Agenda de dicha reunión de trabajo se recoge en el Apéndice 1.



Por fin el 30 de Octubre, a las 5 de la tarde (hora española), como estaba previsto, el transbordador espacial Challenger de la NASA era lanzado desde Cabo Kennedy en Florida, llevando en su interior el laboratorio Spacelab.

#### 8.4. RESULTADOS PRELIMINARES

Por lo que respecta al experimento español de física de fluidos, el objetivo era básicamente repetir los ensayos previstos para el primer vuelo (en 1983), con dos modificaciones principales: primero, con la experiencia ganada entonces, se simplificó la secuencia de ensayos para adaptarse a la realidad (en un par de horas de agitada preparación en un ambiente hostil, una persona no puede realizar todos los experimentos que se han imaginado durante varios años los componentes de un equipo investigador). La segunda modificación fue para evitar el desparramamiento del líquido de trabajo; se cambiaron los discos y el sistema de inyección, y ha sido todo un éxito.

En el Apéndice 2 se recoge el registro de voz de las conversaciones mantenidas en directo con el astronauta, Reinhard Furrer, durante la realización de este experimento, y en el Apéndice 3 se muestra una versión preliminar de las operaciones realizadas.

En resumen, y a falta de analizar las imágenes tomadas a bordo, puede decirse que esta vez se ha conseguido controlar el anclaje de la columna líquida a los discos, y se han realizado todos los

ensayos previstos. Hay que destacar el anormalmente alto nivel de ruido mecánico en este vuelo, pero el análisis mostrará si se trata de algo anormal o es debido a la extrema sensibilidad de las columnas líquidas tan esbeltas que se llegaron a manejar: cilindros perfectos de 35 mm de diámetro por 100 mm de longitud, las columnas líquidas más esbeltas conseguidas hasta ahora en el espacio!.

**Apéndice 1. AGENDA DE TRABAJO DEL ASTRONAUTA EN MADRID**



ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

LABORATORIO DE AERODINAMICA

CIUDAD UNIVERSITARIA

MADRID-3

Experiment SL-D1 WL/FPM-04 "FLOATING LIQUID ZONE" (FLIZ)

PS-PI Meeting on Thursday 29-AUG-85 at Madrid

A G E N D A

8:30- 9:00 PRESENTATION AND DAY PLANNING

9:00-11:00 PLATEAU TANK FACILITY (PTF) EXPERIMENTATION

1. Initial conditions: cylindrical zone 30 mmØ 60 mm long
2. Exercise small perturbations (familiarization)
3. Disc vibration
4. Rotation of one and the two discs (leave 3 rpm on both)
5. Cylindrical breaking (note length)
6. Merging and liquid removal at constant disc separation
7. Breaking by liquid removal at constant disc separation
8. Merging and liquid recovering (leave a short bridge)

11:00-11:30 COFFEE BREAK

11:30-12:30 OPEN AIR INJECTIONS AND ANCHORING TRIALS

12:30-13:30 FLIGHT AND GROUND FILMS AND DISCUSSIONS

1. Flight discs test for SL-1
2. Flight film from SL-1
3. Video recording from SL-1
4. Parabolic flight hardware test
5. TEXUS-12 flight preparations
6. TEXUS-12 flight film
7. Background raster test for SL-D1
8. Overview video production of ground testing
9. Flight procedures for SL-D1

Prepared by I. Martinez

ATTENDANCE:

Reinhard FURRER  
Isidoro MARTINEZ  
José MESEGUER  
Angel SANZ

Apéndice 2. **TRANSCRIPCION DEL REGISTRO DE VOZ**

## APENDICE 2. TRANSCRIPCION DEL REGISTRO DE VOZ

### Acrónimos y otros símbolos

- AOS : Acquisition Of Signal. Tiempo en el que existe contacto por radio con el Spacelab
- CIC : Crew Interface Coordinator. Encargado de comunicaciones con los astronautas (Ulf Merbold)
- CCO : Central Console. Panel de mandos del WL, situado sobre el FPM
- DL Munchen: indicativo del Centro de Control de Operaciones del Spacelab, en Munich
- FLIM: Forced LIquid Movements. Experimento sobre movimiento de líquidos en depósitos, realizado también en el FPM (Jan Vreeburg, Holanda)
- FLIZ: Floating LIquid Zone. Indicativo del experimento español sobre columnas líquidas
- FPM : Fluid Physics Module. Módulo de física de fluidos donde se realizan los experimentos (integrado en el WL)
- LOS : Lost Of Signal. Tiempo en el que no existe enlace por radio
- MS2 : Mission Specialist 2 (Bonnie Durban). Astronauta en el Spacelab
- OCR : Operations Change Request. Petición de cambio de operaciones
- PI : Principal Investigator. Investigador en tierra (Isidoro Martínez)
- PS2 : Payload Specialist 2 (Reinhard Furrer). Astronauta en el Spacelab
- STEM: Surface TEnsion Minimum. Experimento en un mínimo de la tensión superficial de una mezcla binaria (Jean Claude Legros, Bélgica)
- VITR: Video Instruments Tape Recorder. Sistema digital de almacenamiento de señales para su envío a tierra en casi tiempo real
- WL : Werkstofflabor. Banco de ensayo de ciencia de los materiales (Jorgan Shuram). En el Spacelab-1 se denominaba MSDR
- : pausa en las comunicaciones (sin contacto, o no relacionado directamente con este experimento)
- .....: comunicación interrumpida, indescifrable, o sin interés

VOICE LINK TRANSCRIPT

WL : CIC, this is WL in CIC loop

CIC : Go ahead WL

WL : Ulf, just for your information, Isidoro Martinez, FLIZ PI, is ready up here in standby.

CIC : OK.

WL : Ulf, we'd like to know if Reinhard has started FLIZ experiment

CIC : Reinhard, we've a note here for you to take a couple of pictures of the STEM A and STEM B cells, outside the FPM; would you find them in drawer IM-G.

PS2 : Then, you'd like a few photographs taken from STEM 1 and 2 containers in IM-6. It's something in particular that you'd like to see?

WL : CIC, WL?

CIC : WL, go.

WL : He should have to stop the other activities, he's late.

CIC : I think this's a good call. We'd better got him on FLIZ experiment quick.

WL : Yes, we required that he's going to that, because we've another experiment scheduled just behind this one.

CIC : OK.

WL : We're worried here about Reinhard being late with FLIZ experiment and not making best use of next TV coverage.

CIC : Reinhard, the FPM experiment FLIZ is linked into real time TV coverage and for that reason, people are concerned not to fall behind the timeline.

PS2 : I'll try to stay in.

PS2 : Dl Munchen. I'm looking around for the FLIZ raster, apparently it got into a place it shouldn't be, so I'll try to find it.

WL : CIC, WL in CIC loop?

CIC : Go.

WL : At what time did they started to perform FLIZ?

CIC : Spacelab From dl Munchen, we have you also on real time video

PS2 : It occurs to me that I cannot find at the moment the raster for FLIZ. Could you ask Isidoro whether I could use any of the raster that are here around?

CIC : DI Munchen for Reinhard; you came in a little bit garbled. Could you please repeat what you're looking after?

PS2 : I cannot find at the moment the transparency, the raster, for FLIZ experiment. The question is, can I use anything else?

CIC : WL, did you copy the air-to-ground? Reinhard is trying to find the raster and he asks the question whether he can use anything else or perhaps can even leave it out.

WL : CIC, tell him to forget about the raster and use black dot illumination.

CIC : Then, it's only black dot and no raster, is that correct?

WL : That's correct, proceed.

CIC : DI Munchen for Reinhard . The answer is you put the illumination system in black dot and you forget the raster.

PS2 : Going to the black dot and no raster required.

-----

PS2 : FPM, Munchen from Reinhard

CIC : Reinhard, go ahead, please.

PS2 : I installed the syringe for FLIZ and ...

CIC : WL, is the PI available?

WL : Yes, he's standing by.

-----

CIC : DI Munchen for the FPM. Reinhard, please record FLIZ experiment on VITR, you have the full tape.

PS2 : I understand. I've just injected the liquid up to the orifice ...

-----

CIC : Spacelab, This's DI Munchen. Could you give us a briefing, and update, a status report, please.

PS2 : We've had a big jet firings... I had to retract the FPM. I managed to get to point A and B, but when I was from B to C in the diagram shortly before C, at about a column length of about 70 mm the column broke. There was no spillage. It was a nice operation, and I've just finished now to recover, but I've to wait until the big thruster firing test is over.

CIC : Reinhard, we copied, we have also the display set up on the firing tests. Would you kindly repeat the position you were at before you went to the 40 mm length and got the breakage of the column.



PS2 : I got the syringe counter, when I was at point B, was 12.3. I started out with 5.8, that was the original zero setting when the liquid appeared at the orifice, and then I got a cylindrical column at 12.3.

CIC : We copied, cylindrical column at a syringe counter reading 12.3 and I understand this was point B, like Bravo.

PS2 : That's right, Bravo, and on the way from Bravo to Charlie, shortly before Charlie, the oscillations within the liquid column become completely slow and pretty pronounced. Obviously the translation speed is a little bit high, so I will do it once more and may be when the column gets longer. I slow down the translation a little bit.

CIC : DL Munchen for Spacelab. We'll like to come aboard with real time TV. Oh! we have you. Thank you.

PS2 : The anchoring, I've tested it before, when I was from B to C, I tested a little bit the stability of the system. I inject a little bit more liquid to see, and it appeared to me that the whole system and the end plates are reasonable stable, so that you can play with it.

CIC : For your information, we now receive the picture from the FPM. We can monitor how you clean up the FPM experiment chamber. We have the little Sony video camera on our display.

PS2 : Fine. I'm just now making sure that the edges are really dry from the recovery and I can get a nice attachment once again. I'm going with alcohol first and with a cotton handkerchief.

CIC : We're monitoring. By the way, is Erns somewhere available for a brief discussion?

-----

PS2 : We're back again. The separation of the discs at the moment is 26 mm and both front plate and rear plate are rotating with +3 rpm. I've just now to wait to the end of firing tests in order to be able to inject again.

CIC : FPM, on this pass we have some drop-outs of the KU band, and that's because of the Shuttle attitude, so we loose the video from time to time.

PS2 : Frame counter is now reading 414 octal. Do you want me to record the forming on the cinecamera the stretching from B to C.

PI : Take everything at 1 frame per second; everything. It's just for recording purpose.

CIC : FPM and WL ...

PS2 : DL Munchen, this is Spacelab; how do you read?

CIC (assistant): Spacelab, go ahead.

PS2 : I'm trying to get an answer from Isidoro. It's about film management. The reading is 414 octal, at the moment, for the frame counter; whether he'd like to take pictures again of the forming of the liquid column from A to B, rather than doing only once more the coming from B to C.

PI : This is FLIZ PI, please record everything as in the procedures. One frame per second, whatever it happens.

PS2 : I understand, but do you want me to record once more from A to B or from A, sorry, only from Bravo to Charlie or once more from Alpha to Bravo?

WL : CIC, WL?

PI : Starting at point A. That is, everything. As soon as there's liquid in the test chamber you just take one picture every second.

PS2 : I understand, I'll record everything once more.

WL : CIC, WL?

PS2 : And confirm, interval time now of one second instead of two?

WL : Yes, he's saying one frame per second.

PS2 : Within the procedures they ask for interval time of two seconds and not of one second. What do you want me to do?

PI : Sorry! You're right, two seconds, interval two seconds.

PS2 : OK.

----

PS2 : This time the thruster firing is over. I'm restarting now. Liquid is being injected, the discs separation is 26 mm.... touching the plate and the syringe reading is 12.2.

PI : Reinhard,,, this's FLIZ PI, over.

PS2 : We've reached point number Bravo; syringe setting is 12.7. Now we're going again to point Charlie.  
I stop because there're some vibrations going on here in Spacelab.

CIC : Reinhard, this is DI Munchen, be advised that we have the real time video back and it's very impressive to watch the column.

PS2 : You see, it should be the hydraulic tests. Watch the column, everything is vibrating, you see it?

CIC : Yes, we do.

PS2 : The best accelerometer you can have.

CIC : Say again, Reinhard.

PI : Reinhard, this's FLIZ PI. Could you change the illumination to background? Just to have a better view of what is happening.

PS2 : I could not understand you. Please.

PI : I'll repeat. Could you change now the illumination to "background", just for a moment, just to see what is happening.

PS2 : Do you like that better?

PI : Yes, this is much better. And now proceed from Bravo to Charlie at a slow pace.

PS2 : That's understood, but you see all that vibrations, so I cannot proceed at the moment. I'll have to stand by until the testing is over.

-----

PS2 : Munchen, I'm proceeding now. A question to the PI. Now, while extending the column, do you want me to maintain this illumination or what to do?

PI : Yes, maintain background illumination and proceed from ...

PS2 : It's still the Vinten camera setting correctly with this new illumination or do I have to reset it?

PI : Don't bother about the Vinten camera.

PS2 : OK, that's fine.

-----

PI : Reinhard, try to better set the field-of-view of the TV camera.

-----

PS2 : The oscillation is very very slow, and that's the reason why I stop now the translation in order to calm it down.

-----

PI : Reinhard, please mind that the field of view is not appropriate.

PS2 : This does happens sometimes.

Now, this is 95 mm. I'll try now to establish a perfect cylindrical shape.

Such a long floating liquid column.

CIC : Reinhard, we're all excited about th column, it's gorgeous.

PS2 : The only thing is the oscillations within the column, I think with about a period of 4 seconds or so. These were the oscillations which made the column to break in the first run, because I wasn't aware of how long the delay time is for the filling of the liquid you need to establish that column.

The syringe counter reads now ...

I'm just getting a little bit of liquid back again.

A little bit more.

PI : Reinhard, could you zoom in a little bit more? I'd like to fill the whole screen with the liquid column.

PS2 : Say it again, do you want me to zoom in a little bit more?

PI : Affirmative.

-----

PI : DON'T MOVE! It's too noisy up there!

CIC : Bonnie, could you help Reinhard to start quickly the VITR to record the FPM experiment on VITR, and we allocate the entire tape.

PS2 : OK, I'll start recording when we come IOS.

CIC : We're still AOS but we lost real time video.

PS2 : I'll start it right away.  
It doesn't die away! I means, this column looks beautiful to me but I'm not quite sure whether we can absolutely stabilize it.

PI : Leave it for a while without applying any mechanical disturbances, just to see how it behaves in absence of inputs.

PS2 : You want me to do what? To watch how the zone behaves in absence o what?

PI : In absences of inputs from your side, it's to see the behaviour in the ambient noise.

PS2 : Right, it's possible. In the Spacelab, at the moment, there're no tests going on, either no... I wonder if I could do the oscillations at the moment.  
The oscillations go from a typical C-mode over to a longitudinal dredging mode with a valley in the middle.  
I've a question for the PI. Would it be wise to stop the rotation?

PI : OK, Reinhard, stop it for a while, let's say for one minute or so, and see it that helps to improve the situation.

PS2 : OK, thence, I'll stop now the isorotation, of the front and the rear plate, and look at what happens. OK, it stops, now.

-----  
CIC : Bonnie, we'd like you to execute the following steps at the CCO.

PS2 : Break, Ulf, Bonnie is gone away from me, becuase we want to make sure that the vibrations do not come from where she is.

CIC : We copied. Perhaps she can tell me when she's ready and available D1 Munchen for Bonnie, be very careful not to exercise any accelerations on the Materials Science Double Rack. At the CCO we'd like you to verify the gee r position light flashing.

-----  
PS2 : FPM, I think the oscillation is now slowed down and I feel we could start with vibration.

PI : Reinhard, FLIZ PI; yes, I agree, don't put any more the 3 rpm rotation and proceed to the vibration steps.  
I'm going now to the vibration mode, this's step 4.1 in the procedure, that means I'll try to apply a maximum amplitude of .4 mm and with .1 Hz.

-----  
PS2 : The amplitude is set and I'm starting with the oscillation now, according to the procedure 4.1.

PS2 : Munchen, one minute since oscillation started and there's no change visible. It seems the column is in the same condition it was before.

PI : Reinhard, FLIZ PI, then, go on, proceed with higher values.

PS2 : Well, now, I started the oscillation with a frequency of .3 and there's a noticeable deformation with three nodes.

PS2 : Beautiful! Three nodes can be seen. Beautifully!, three nodes Reinhard, can you stop communication for a second, I have one more thing for Bonnie....

MS2 : Reinhard's working on the FPM and he'd like to send the open column scene to the ground. Is D1 Munchen receiving?

CIC : We'll soon get KU band coverage and then we'll receive it.

MS2 : OK. We'd like to come down with the open column in the FPM and then go to module view.

PS2 : Hello! Nice to have you back.

A status report on the FPM. I was at a column length of 95 mm and I dialed and isorotation of 12 rpm, and I could not stop the isorotation before the column did break because the whole column seems to me pretty close to, I mean, the stability limit has been reached or at least we were pretty close. So, the column broke during the isorotation. There was no major problem. I recovered. And then I went back to a column of 100 mm in length, this was point D/3 and then I could manage to make a stable column again, but then we went into firing testing and I had to recover the liquid. Now I'm ready to go to point D again.

CIC : That's all copied and we appreciate this specially intense report. We have, when there are no further reports, to OCR concerning also WL operations, for whoever is able to copy them, over.

PS2 : If you hold in a second, Bonnie might be able to do it. Isidoro, be advised that, because of the very close to unstable behaviour of the liquid moves pretty slowly and we use up the VTIR tape already, I'm just rewinding, and keep us achieved about the upcoming data management.

PS2 : I'd like you give me advice about the data management. I'm now trying to produce once more the 100 mm long liquid column.

CIC : We'll come up soon.

WL : CIC, this is WL on CIC loop.

CIC : Go ahead, WL.

WL : FPM people advice me to ask the crew to stop this FPM experiment, FLIZ, now, at soon as possible in order to perform some other WL activities, so

he should now stop this experiment.

CIC : Reinhard, this is DI Munchen. I've just got a call from WL people. The FLIZ experimenter is extremely happy with what you have done for him, but now it seems that you should stop these activities and go ahead with other WL activities, if you can do so.

PS2 : Please, confirm. I should stop the FPM for the moment and do other WL activities. Confirm.

CIC : This's correct because we're trying to get some OCRs concerning the GHF and also concerning the MHF.

PS2 : I understand. First information is for the VITR; you can insert tape number seven, and use it up for the FPM. The second is also for WL, you should delete steps number ...

-----

PS2 : Reinhard, from Spacelab. I'm still standing by for the OCRs; otherwise I could go back to the FPM.

CIC : OK, Reinhard, I give you the read down: first delete OCR number WL-524...

-----

PS2 : I'm at the moment at the FPM. I've come back to the 90 mm column and starting with isorotation at 13 rpm. Is the FPM PI around?

WL : The PI is standing by for the air-to-ground link.

CIC : We will enable the PI.

FLIM: Reinhard, this is Jan Vreeburg, FLIM PI, do you read me?

PS2 : I read you loud and clear. In the mean time a short report on your experiment. I managed to produce a 100 mm long column, but only when we were in the free drift. I started the isorotation, but I could not stop isorotation before breakage, either, because once the movement has started you cannot stop it anymore. I did it, I broke the zone, I recovered, and now I'm back at the position of a column length of 90 mm and starting up to 13 rpm.

FLIM: OK, Reinhard, I read you loud and clear, but could you terminate FLIZ and start FLIM, Vreeburg?

PS2 : Say it again, what do you want me to start again?

FLIM: FLIM experiment, with the three plastic containers.

PS2 : Do you want me to continue.

FLIM: No, stop the open zone experiment and start FLIM, the three different-shape containers experiment.

PS2 : I understand, I have to stop the present experiment but could you refer to the page number in the procedures for what to do next. It's easy for me to understand.

CIC : FLIM experimenter,, tell me the page number of what do you want to do; the page number, please, and the text.

FLIM: CIC, this is FLIM experimenter. Start with page 9.3, step 1.

PS2 : Understood, starting with FLIM 9.3 and terminating the present experiment.

----

CIC : MS1, D1 Munchen, can you confirm that we have at the present moment VITR number 7 and can you, please, tell us what's on that tape?

PS2 : This is Spacelab. Say again.

CIC : OK Reinhard, can you confirm that we have at the moment VITR tape number 7 and tell us what is on the tape.

PS2 : That's confirmed, we have tape number 7 and on this tape I recorded the 13 rpm - 90 mm column and the 10 rpm - 100 mm long column for FLIZ experiment, as well as the breaking of both of them.

CIC : Thank you very much. That's copied. We appreciate.

PS2 : I've reached now the step of the 13 rpm isorotation stability limit. Must I now shut down this experiment and go to FLIM?

WL : OK, Reinhard, that's affirmative, shut down FLIZ, at the moment, and go to FLIM.

PS2 : Thus, this terminates FLIZ experiment and I'm changing over to FLIM. Did you get in the meantime this beautiful picture from the stretching mode and the breaking (no the breaking is still here on the VTR) but the stretching mode, down to the ground?

CIC : We had some pictures, but not the breaking. We saw some stretching.

PS2 : All the vibration modes are in the previous VITR, number 6, and the breaking i on this tape, number 7, now.

CIC : OK, copied. For your information, the remaining tape is needed by SLED 1, so do not make any more pictures of the FPM.

PS2 : Then we stop recording FPM.  
Before, to Isidoro Martinez: What I saw here is even prettier than he could show me in his lab in Madrid.

WL : CIC, we copied and we appreciate it very much. And, please, tell Reinhard that the IHF is a very fast facility and ...

----

FLIM: CIC, this is FLIM PI in your loop. Please tell Reinhard that he should record FLIM experiment on film rather than on VITR. Besides, there's another request; could you ask him whether he used the black dot a the green dot for the illumination of FLIZ?

CIC : Reinhard, a question from FLIZ; did you use the green dot or the black dot.

PS2 : I used always the green dot because we could see the shape with that illumination much better.

CIC : Thank you.

-----

PS2 : I have just now closed down FLIZ experiment and I'm pressing on with the containers.



**Apéndice 3. SECUENCIA DE ACTIVIDADES REALIZADAS EN EL SPACELAB**

# REAL TIMELINE FOR EXP. "FLIZ"

23:21:15 F#0 Temperature readings (FPM on)  
 24:35 F#2 Translation starts (intermitent)  
 34:59 F#45 Cameara starts at 2 spf  
 35:50 F#59 Rotation start (3 rpm)  
 41:46 F#182 Camera stops (FIRST BREAKAGE)  
 48:56 F#182 Camera starts at 2 spf  
 51:40 F#264 Camera stops for 37 minutes (at point 0)  
 00:18:07 F#264 L=0 mm. Real time TV (cleaning)  
 18:23 F#264 L=6.3 mm  
 28:25 F#264 Canera starts at 2 spf. Step 2.1 of second trial. Syr# A=8.5  
 31:12 F#349 L=26 mm (3 rpm, camera on). Syr# B=12.7 (contact at 12.2)  
 32:35 F#391 L=31.4 mm (3 rpm, camera on)  
 33:02 F#404 L=31.4 mm (3 rpm, camera on)  
 33:25 F#416 Camera stops for 3 minutes  
 33:49 F#417 L=31.4 mm (3 rpm, camera on)  
 35:12 F#418 L=31.4 mm (3 rpm, camera on)  
 36:17 F#418 L=37.7 mm (3 rpm, camera on)  
 36:41 F#419 Canera starts at 2 spf  
 37:16 F#436 L=53.2 mm (3 rpm, camera on)  
 37:38 F#447 L=58.3 mm (3 rpm, camera on)  
 38:27 F#472 L=67.8 mm (3 rpm, camera on)  
 39:20 F#498 L=73.1 mm (3 rpm, camera on)  
 39:52 F#514 L=81.7 mm (3 rpm, camera on)  
 40:26 F#531 L=90.5 mm (3 rpm, camera on)  
 40:50 F#543 L=95 mm (3 rpm, camera on)  
 41:05 F#551 L=95 mm (3 rpm, camera on)  
 48:40 F#778 L=95 mm (3 rpm, camera on)  
 49:10 F# Stop rotation from 3 rpm to 0  
 49:23 F#800 L=95 mm (0 rpm, camera on)  
 53:05 F#911 Camera stops for 3 minutes  
 54:45 F#911 Starts oscillation amplitude  
 55:19 F#912 L=95 mm (0 rpm, camera on). Osc. ampl=0.484 mm  
 56:10 F#912 Canera starts at 2 spf  
 56:21 Starts 0.1 Hz  
 59:26 Starts 0.3 Hz  
 59:57 F1022 f=0.2 Hz  
 1: 1:09 Starts 0.7 Hz  
 2:15 Starts 1.1 Hz  
 3:06 Starts 1.6 Hz  
 4:35 Ends oscillation amplitude  
 11:25 Rotation start at 3 rpm w/o camera  
 21:00 Rotation stop from 3 rpm to 0 w/o camera  
 26:35 Rotation start at 12 rpm with camera and ramp 9  
 28:39 Rotation stop from 12 rpm (SECOND BREAKAGE)  
 29:30 Camera stops. Change from VITR#6 to #7  
 33:00 Rotation start at 3 rpm w/o camera (ramp 9)  
 36:42 Rotation stop. Point D/3  
 50:39 Rotation start at 10 rpm with camera (ramp 9)  
 54:00 Rotation stop from 10 rpm to 0. End od VITR#6. Standby  
 2: 1:00 Report from crew  
 35:00 FPM pushed into MSDR  
 3: 3:03 F1505 L=111.3 (camera on)  
 5:37 1506 106.9 (camera on)  
 5:48 1506 95.9 (camera on)  
 6:21 1507 64.9 & stops (camera on)  
 6:52 1507 65.0 (camera on)  
 7:18 1507 44.1 (camera on)

7:42	1508	20.1 (camera on)
7:45		Canera starts at 2 spf
8:05	1508	24.9 (camera on)
8:32	1508	46.2 (camera on)
8:57	1509	41.2 (camera on)
9:18	1509	22.3 (camera on)
10:23	1509	9.6 (camera on)
11:01	1510	28.6 (camera on)
11:26	1510	41.1 (camera on)
12:08	1511	62.1 (camera on)
12:29	1511	65.0 (camera on)
13:56		Rotation start at 10 rpm
15:50		Camera stops & Rotation stop
21:35		Canera starts at 2 spf
27:00		Report from crew
30:32		Camera stops (big jump!, from F#1833 to 2033
35:21		Last change (translation starts)
42:00		Report from crew

Notes: Premission timeline was from 22:48:00 to 00:49:00  
Maximum temperature fluctuation was 1.5°C.